

## SS 13 - Fachdidaktik I - Übungsblatt 4 vom 15.05.13 - Abgabe am 29.05.13

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Stellen Sie die Axiome für einen Körper übersichtlich zusammen. Beschreiben Sie, welche dieser Axiome für  $\mathbb{N}$  bzw.  $\mathbb{Z}$  nicht gelten.

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für die Schule wird oft die folgende Formulierung des Vollständigkeitsaxioms verwendet:

In  $\mathbb{R}$  hat jede monoton steigende und nach oben beschränkte Folge einen Grenzwert.

a) Geben Sie die ersten 8 Glieder der Folge  $(a_n)$  mit  $a_n \in \mathbb{Q}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und folgenden Eigenschaften an:

$a_n$  hat  $n$  Nachkommastellen und ist die größte Zahl mit  $a_n^2 < 2$ .

Begründen Sie, dass  $(a_n)$  monoton steigend und nach oben beschränkt ist.

b) Schreiben Sie die *Liouville'sche Zahl*  $L = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$  so auf, dass ihr Aufbau für einen

Schüler verständlich ist.

Begründen Sie, dass die Folge  $(l_n)$ ,  $n \geq 0$ , mit  $l_n = \sum_{k=1}^n 10^{-k!}$  monoton steigend und nach oben

beschränkt ist.

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Eine Zahlenmenge  $M$  heißt abzählbar, wenn es eine Bijektion von den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  nach  $M$  gibt.

Zeigen Sie in einer übersichtlichen Darstellung:

a) Die rationalen Zahlen sind abzählbar.

b) Die reellen Zahlen sind nicht abzählbar (überabzählbar).

### Aufgabe 4 (4 Punkte)

Geben Sie an, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

a) Zu  $a, b \in \mathbb{Q}$  mit  $a < b$  gibt es unendlich viele  $z \in \mathbb{Q}$  mit  $a < z < b$ .

Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Zu  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  gibt es unendlich viele  $z \in \mathbb{Q}$  mit  $a < z < b$ .

Angabe von wahr oder falsch genügt.

c) Es gibt konvergente Folgen  $(x_n)$  mit  $x_n \in \mathbb{Q}$ , deren Grenzwert in  $\mathbb{Q}$  liegt und solche, deren Grenzwert  $g$  nicht in  $\mathbb{Q}$  liegt.

Begründen Sie Ihre Antwort.

d)  $\sqrt{2} + \sqrt{2}$  rational. Begründen Sie Ihre Antwort.