Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

SS 2013
26.04.2013
Blatt 2

Übungen zu
„Mathematik für Physiker 4“ und
„Ergänzungen zu Mathematik für Physiker 4“

1. (4 Punkte) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{3n}$ der Zustandsraum des n-Körperproblems mit Körpern der Masse $m_1, \ldots, m_n > 0$. Zeigen Sie, dass *der Schwerpunkt* der n Körper $S : D \to \mathbb{R}^3$

$$S(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{n} m_j x_j$$

($M = m_1 + \ldots + m_n$) unter jeder Lösungskurve des n-Körperproblems eine geradlinig gleichförmige Bewegung vollzieht, $\ddot{S} = 0$.

2. a) (2 Punkte) Sei X eine Menge und $x \in X$. Für jedes $A \subseteq X$ setze man $\delta_x(A) := 0$, wenn $x \notin A$ ist und $\delta_x(A) := 1$, falls $x \in A$ ist. Zeigen Sie, dass δ_x ein Maß auf der Potenzalgebra von X ist.

   b) (2 Punkte) Sei X eine abzählbare Menge. Zeigen sie, dass es für jedes Maß μ auf der Potenzalgebra $\mathcal{P}(X)$ eine Funktion $\varphi : X \to [0, \infty]$ gibt, so dass $\mu(A) = \sum_{x \in A} \varphi(x)$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)$ ist.

3. (4 Punkte) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge X und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Seien $A_k \in \mathcal{A}$ ($k \in \mathbb{N}$), $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$, $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, sowie $\mu(A_1) < \infty$. Beweisen Sie die *Schrumpfungsformel*:

$$\mu(A) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k)$$

Aufgabe 4 ist für die Ergänzungsvorlesung zu bearbeiten.

4. (4 Punkte) Bestimmen sie die Lösung von $\dot{x} = x(1-x)$ auf $\mathbb{R}$ zum Anfangswert $x_0 = 1/2$.

Abgabe: Freitag, 03.05.2013, 11 Uhr in der Vorlesung