Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

SS 2013
31.05.2013
Blatt 6

Übungen zu „Mathematik für Physiker 4“ und „Ergänzungen zu Mathematik für Physiker 4“

1. a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass das *zweischalige Hyperboloid* $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist,

$$M = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 = 1\}.$$

   b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass der Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^3$ keine Untermannigfaltigkeit (der Dimension 2) im $\mathbb{R}^3$ ist,

$$K = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}.$$

2. (4 Punkte) Sei $f : [a, b] \to (0, \infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion und $M \subseteq \mathbb{R}^3$ der Rotationskörper, der entsteht, wenn man den Graphen $\Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^2$ um die x-Achse dreht. Zeigen sie, dass für den Flächeninhalt A von M gilt:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

3. Die *Gamma-Funktion* wird definiert durch $\Gamma : (0, \infty) \to (0, \infty)$,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

   a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral wirklich existiert und die folgende Funktionalgleichung für alle $x \in (0, \infty)$ erfüllt

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$$

   b) (2 Punkte) Berechnen sie $\Gamma(1)$ und zeigen Sie dann mit Hilfe von Teil a): $\Gamma(n) = (n - 1)!$, für alle $n \in \mathbb{N}$. (Die Gamma-Funktion *interpoliert* daher (bis auf eine Verschiebung um 1) die *Fakultät*.)

   c) (2 Punkte) Berechnen Sie $\Gamma(\frac{1}{2})$ und zeigen Sie dann mit a) und b), dass für das Volumen ω_n der n-dimensionalen Einheitskugel für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

Aufgabe 4 ist für die Ergänzungsvorlesung zu bearbeiten.

4. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n : I \to \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbar. Wir betrachten die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)x(t) = 0 \qquad (*)$$

auf $\mathbb{R}$.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass der Lösungsraum $L_h := \{x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) : x \text{ löst } (*)\} \subseteq \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ ein n-dimensionaler Unterraum ist.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $(x_1, \ldots, x_n) \subseteq L_h$ genau dann eine Basis von L_h ist, wenn ihre sogenannte *Wronski-Determinante*

$$W(t) := \det \begin{pmatrix} x_1(t) & \ldots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & \ldots & \dot{x}_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

für ein (und dann für jedes) $t \in I$ von Null verschieden ist.

Abgabe: Freitag, 07.06.2013, 11 Uhr in der Vorlesung