Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

SS 2013

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

14.06.2013
Blatt 8

Übungen zu
„Mathematik für Physiker 4" und
„Ergänzungen zu Mathematik für Physiker 4"

1. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ und $a \in D$. Ist $f = u + iv$ in a reell-differenzierbar, so setzt man zunächst
$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) := \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a),\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) := \frac{\partial u}{\partial y}(a) + i\frac{\partial v}{\partial y}(a)$$
und definiert dann die sogenannten Wirtinger-Ableitungen
$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) \text{ und } \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a).$$
   a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass f genau dann in a komplex differenzierbar ist, wenn
   $$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$$
   ist und dass in diesem Fall $f'(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)$ gilt.
   b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass es eine Funktion $\varphi : D \to \mathbb{C}$ mit $\lim_{z\to a} \frac{\varphi(z)}{z-a} = 0$ gibt, so dass für alle $z \in D$ gilt:
   $$f(z) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial z}(a)\cdot(z-a) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\cdot\overline{(z-a)} + \varphi(z)$$
2. (4 Punkte) Berechnen Sie die Wirtinger-Ableitungen der folgenden Funktionen auf $\mathbb{C}$ und bestimmen Sie, wo diese komplex differenzierbar sind:
$$f_1(z) = \bar{z},\quad f_2(z) = |z|^2,\quad f_3(z) = \mathrm{Re}(z),\quad f_4(z) = 2z^2\bar{z} - z\bar{z}^2$$
3. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Der *Laplace-Operator* Δ operiert auf einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $u : G \to \mathbb{R}$ durch $\Delta u := (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})(u)$. Es heißt u *harmonisch*, wenn $\Delta u = 0$ ist. Zeigen Sie
   a) (2 Punkte) Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, so sind $\mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$ harmonisch.
   b) (2 Punkte) Ist $f : G \to \mathbb{C}^*$ holomorph, so ist auch $\ln|f|$ harmomisch.

Aufgabe 4 ist für die Ergänzungsvorlesung zu bearbeiten.

4. (4 Punkte) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung zum Anfangswert $x(0) = 0$ auf $\mathbb{R}$:
$$\dot{x}(t) = x(t) + e^t$$

Abgabe: Freitag, 21.06.2013, 11 Uhr in der Vorlesung