Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

SS 2013
21.06.2013
Blatt 9

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

Übungen zu
„Mathematik für Physiker 4“ und
„Ergänzungen zu Mathematik für Physiker 4“

1. a) (2 Punkte) Integrieren Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^2$ über den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : t \mapsto 1 + e^{it}$.

   b) (2 Punkte) Parametrisieren Sie die geradlinige Verbindungsstrecke zwischen $-1 \in \mathbb{C}$ nach $1 \in \mathbb{C}$ mit einem Weg γ_1 und sei γ_2 der Weg $[0, \pi] \to \mathbb{C} : t \mapsto e^{i(\pi - t)}$ von -1 nach 1. Integrieren Sie nun die Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \to |z|$ über die Wege γ_1 und γ_2.

2. (4 Punkte) Berechnen Sie $\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$ für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} : t \mapsto i + e^{it}$ (Hinweis Partialbruchzerlegung und überlegen Sie, warum $\int_\gamma \frac{dz}{z+i} = 0$ sein muss).

3. Sei $G_0 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ und $\log : G_0 \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus.

   a) (2 Punkte) Ist $z \in G_0$ mit $z = re^{i\varphi}$ ($r > 0$ und $\varphi \in (-\pi, \pi)$), so zeige, dass

   $$\log(z) = \ln(r) + i\varphi$$

   ist. (Hinweis: Sei γ_1 der geradlinige Weg von 1 nach r und γ_2 der Kreisweg von r nach z. Berechne $\int_{\gamma_1 * \gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta}$.)

   b) (2 Punkte) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt *Zweig des Logarithmus*, wenn für alle $z \in G$ gilt: $\exp \circ f(z) = z$. Man zeige: log ist ein Zweig des Logarithmus und ist $f : G_0 \to \mathbb{C}$ ein beliebiger Zweig, so existiert ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass für alle $z \in G_0$ gilt: $f(z) = \log(z) + 2\pi ik$. (Hinweis: Für diese Aufgabe benutze man, dass die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist mit $\exp' = \exp$ und die Funktionalgleichung $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$, für alle $z, w \in \mathbb{C}$ erfüllt.)

   c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass nicht für alle $z, w \in G_0$ mit $zw \in G_0$

   $$\log(zw) = \log(z) + \log(w)$$

   gilt. Für welche $z, w \in G_0$ gilt diese Formel?

Aufgabe 4 ist für die Ergänzungsvorlesung zu bearbeiten.

4. a) (2 Punkte) Seien $\omega, \gamma > 0$ mit $\gamma \neq \omega$. Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung an:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \cos(\gamma t)$$

b) (2 Punkte) Seien $\omega, \gamma > 0$. Geben Sie ein Fundamentalsystem für die Schwingungsgleichung mit Reibung

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

an. (Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle, wo $\Delta := 4\omega^2 - \gamma^2$ positiv, negativ oder gleich Null ist.)

Abgabe: Freitag, 28.06.2013, 11 Uhr in der Vorlesung