Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

SS 2013

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

12.07.2013

Blatt 12

Übungen zu
„Mathematik für Physiker 4" und
„Ergänzungen zu Mathematik für Physiker 4"

1. (4 Punkte) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $p \in G$. Zeigen Sie: Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f^{(k)}(p) = 0$ für alle $k \geq 1$, so ist f bereits konstant.

2. (4 Punkte) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: f ist genau dann reell-analytisch, wenn es ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ mit $I \subseteq G$ und eine holomorphe Funktion $\hat{f} : G \to \mathbb{C}$ mit $\hat{f}|_I = f$ gibt.

3. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $u : G \to \mathbb{R}$ harmonisch.

   a) (2 Punkte) Definiere $g : G \to \mathbb{C}$ durch
   $$g(z) := \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z).$$
   Zeigen Sie, dass g holomorph ist.

   b) (2 Punkte) Sei nun G sternförmig. Zeigen Sie, dass es dann eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(f) = u$ gibt. (Hinweis: Man nehme eine (geeignete) Stammfunktion von g.)

Aufgabe 4 ist für die Ergänzungsvorlesung zu bearbeiten.

4. (4 Punkte) Sei H ein unendlichdimensionaler Hilbertraum und $\mathfrak{a} = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Hilbertbasis. Zeigen Sie: Ist $\mathfrak{b} = (f_i)_{i\in I}$ eine weitere Hilbertbasis, so ist auch $\mathfrak{b}$ abzählbar unendlich. (Hinweis: Betrachte für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Teilmenge $B_n := \{i \in I : \langle f_i, e_n\rangle \neq 0\}$. Zeige, dass B_n abzählbar sein muss (mit Bessels Ungleichung) und $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.)

Abgabe: Freitag, 19.07.2013, 11 Uhr in der Vorlesung