Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

SS 2013

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

19.07.2013
Blatt 13

Übungen zu
„Mathematik für Physiker 4“ und
„Ergänzungen zu Mathematik für Physiker 4“

1. (Satz von Weierstraß) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f_n \in \mathcal{H}(D)$ holomorphe Funktionen (für $n \in \mathbb{N}$), die kompakt gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ konvergieren (d.h. für jedes Kompaktum $K \subseteq D$ ist die Konvergenz $(f_n|_K) \to f|_K$ gleichmäßig).
   a) (2 Punkte) Zeigen Sie: f ist auch holomorph (Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Morera, d.i. Aufgabe 1, Blatt 11).
   b) (2 Punkte) $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert kompakt gegen f' (Hinweis: Cauchys Integralformel für f_n' und f').
2. (4 Punkte) Beweisen Sie mit Hilfe des Identitätssatz die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus für alle $z, w \in \mathbb{C}$:
$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z)$$
$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(w)\sin(z).$$
3. (4 Punkte) Bestimmen Sie die Singularitäten folgender Funktionen und bestimmen Sie dann, welcher Art diese sind:
$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}, \qquad g(z) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}}.$$

Aufgabe 4 ist für die Ergänzungsvorlesung zu bearbeiten.

4. (4 Punkte) Sei $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass
$$\lim_{\substack{n\to\pm\infty \\ n\in\mathbb{Z}}} \int_0^{2\pi} f(x)e^{inx}\,dx = 0$$
(Hinweis: Benutzen sie die Besselsche Ungleichung).

Freiwillige Abgabe: Freitag, 26.07.2013, 11 Uhr in der Vorlesung. Punkte werden angerechnet.