

Mathematik II für Biologen

Übungsblatt 8 (Abgabe am 14.06.2013)

Aufgabe 29 (Fortsetzung von Aufgabe 11) (10 Punkte)

In Aufgabe 11 wurde die Anzahl der google-Treffer für den Ausdruck " k Katze(n) und h Hund(e)" ermittelt (Tabelle dort). Mit einem χ^2 -Test möchten wir feststellen, ob die Anzahl der Katzen und die Anzahl der Hunde⁶ unabhängig voneinander ist. Mit den Daten für $1 \leq h, k \leq 5$ ergibt sich $\chi^2 \approx 70000$ (MATLAB-Berechnung siehe Webforum). Auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ beträgt der kritische Wert hier ca. 27 (Warum?).

- Was folgern wir aus diesem χ^2 -Test über die Abhängigkeit oder Unabhängigkeit der Anzahl der Katzen und der Hunde?
- Führen Sie für Ihr google-Experiment aus Aufgabe 11b (oder für ein neues Experiment, wenn Sie möchten) ebenfalls einen solchen χ^2 -Test durch, und interpretieren Sie das Ergebnis. Geben Sie unbedingt auch den gegoogelten Ausdruck und die Rohdaten an.

Aufgabe 30 (Vorzeichentest) (10 Punkte)

Ein Makler behauptet, dass Einfamilienhäuser in Tübingen im Schnitt 330 000 € kosten. Sie vermuten aber, dass der Median der Verteilung der Hauspreise größer ist. Um dies zu überprüfen, ermitteln Sie die Preise einiger kürzlich verkaufter Häuser

Haus Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preis in 1000 €	396	321	333	315	300	339	405	360	375	378

und zählen die Anzahl T der Häuser deren Verkaufspreis größer als 330 000 € war, um einen Vorzeichentest⁷ durchzuführen.

- Geben Sie Nullhypothese und Alternativhypothese an.
- Welche Werte kann die Teststatistik T theoretisch annehmen? Welchen Wert hat T für Ihre Stichprobe?
- Wie ist T verteilt, wenn die Nullhypothese stimmt? Geben Sie dazu eine Formel für $P[T = k]$ für alle in (a) bestimmten möglichen Werte k von T an.
- Berechnen Sie den zugehörigen p -Wert des Tests.

Aufgabe 31 (10 Punkte)

Das Pharmaunternehmen ANTIQUARTIS preist das neue Mittel PASTOFEBRIL gegen Weidefieber bei Kühen an. Ein Landwirt probierte dieses Mittel an seiner Kuh Thekla aus, die an Weidefieber erkrankt war. Daraufhin wurde Thekla gesund. Nun ist auch die Kuh Elma an Weidefieber erkrankt.

Geben Sie aufgrund der Beobachtung an Thekla ein 95%-Vertrauensintervall für die Wahrscheinlichkeit p an, dass auch Elma gesund wird, wenn sie mit PASTOFEBRIL behandelt wird. Führen Sie dazu einen einseitigen Binomialtest durch (ohne jedoch die in der Vorlesung angegebenen Faustregeln anzuwenden, da $n = 1$ nun wirklich nicht groß ist). Testen Sie hierbei einseitig $H_0 : p = p_0$ gegen $H_A : p > p_0$ und erinnern Sie sich daran, dass das Vertrauensintervall aus denjenigen p_0 besteht, für die H_0 nicht verworfen werden kann. (Die Alternative H_A entspricht der Behauptung von ANTIQUARTIS und der Hoffnung des Landwirtes, dass PASTOFEBRIL tatsächlich wirkt.)

⁶Ob es sich dabei um die Anzahl der Katzen und Hunde eines Tierhalters, in einem Foto oder um irgendetwas anderes handelt, wissen wir nicht. Dazu hätten wir die Daten sorgfältiger ermitteln müssen.

⁷Das ist nichts weiter, als ein Spezialfall eines Binomialtests, wie Sie gleich sehen werden.

Aufgabe 32

(10 Zusatzpunkte)

Sie bearbeiten in einer Klausur eine Multiple-Choice-Aufgabe bestehend aus fünf Fragen mit jeweils fünf möglichen Antworten, von denen immer genau eine richtig ist. Für jede richtig beantwortete Frage werden Ihnen 2 Punkte gutgeschrieben, für jede falsch beantwortete Frage werden Ihnen 2 Punkte abgezogen, unbeantwortete Fragen geben weder Punktgutschriften noch -abzüge. Falls sich eine negative Gesamtpunktzahl für die Aufgabe ergibt, wird sie mit Null Punkten gewertet.

Die Antwort auf drei Fragen wissen Sie sicher, bei den anderen zwei Fragen haben Sie keine Ahnung – Sie entscheiden sich, bei diesen zwei Fragen zu raten. Sei X die von Ihnen in der gesamten Aufgabe erreichte Punktzahl.

- Welche Werte kann X annehmen?
- Berechnen Sie für jeden der Werte aus Teil a die Wahrscheinlichkeit, dass er angenommen wird.
- Bestimmen Sie nun auch den Erwartungswert $E[X]$, die Varianz $\text{Var}(X)$ sowie die Standardabweichung $\sigma(X)$.
- War es eine gute Idee zu raten?

Aufgabe 33

(10 Punkte)

Eine Suspension von Bakterien (Keimen) wird auf 100 Petri-Schalen abgesetzt, pro Petri-Schale 0,2 ml. Die Keimzahl in der Suspension sei 100/ml. Nach einer gewissen Zeit werden die Bakterienkolonien, von denen jede aus einem Keim entsteht, unter dem Mikroskop ausgezählt.

- Wie groß ist die erwartete (durchschnittliche) Anzahl λ_0 von Bakterienkolonien pro Petri-Schale?

Im folgenden nehmen wir an, dass die Anzahl X von Bakterienkolonien pro Petri-Schale poissonverteilt ist mit einem Parameter, der λ genannt wird.

- Für einen anderen Versuch braucht man Petri-Schalen, die genau eine Bakterienkolonie enthalten. Wie stark muss obengenannte Suspension verdünnt werden, damit die erwartete Anzahl solcher Schalen maximal ist? (Für welches λ ist die Wahrscheinlichkeit maximal, dass eine Schale genau eine Bakterienkolonie enthält?)
- In einem anderen Fall möchte man die Suspension möglichst stark verdünnen, aber so, dass man erwarten kann, dass 80 der 100 Schalen mindestens eine Bakterienkolonie enthalten. Wie stark darf man maximal verdünnen? (Ab welchem λ ist die Wahrscheinlichkeit, für eine fest vorgegebene Petri-Schale keine Bakterienkolonie zu erhalten, $\leq 20\%$?)
- Wie gross ist für $\lambda = 0,8$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht-leere Petri-Schale genau eine Bakterienkolonie enthält? (Salopp gefragt: Wieviele Prozent der Petri-Schalen, die mindestens eine Bakterienkolonie enthalten, werden genau eine enthalten? HINWEIS: Dies ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit.)
- Wie klein muss λ sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht-leere Petri-Schale genau eine Bakterienkolonie enthält, gleich $\frac{3}{4}$ ist?

Aufgabe 34

(10 Punkte)

Die Zufallsvariable X habe folgende Dichte:

$$f(t) = \begin{cases} c(1 - t^2) & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Skizzieren Sie $f(t)$ und bestimmen Sie die Konstante c so, dass f eine Dichte ist. (Hinweis: Die Fläche unter der Kurve muss 1 sein.)
- Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X .
- Berechnen und skizzieren Sie die zugehörige (kumulative) Verteilungsfunktion $F(t)$.
- Bestimmen Sie den Median von X , d.h. die Zahl med mit $F(\text{med}) = \frac{1}{2}$.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X einen Wert zwischen 0,4 und 0,8 annimmt, also $P[0,4 \leq X \leq 0,8]$. Zeichnen Sie diese Wahrscheinlichkeit in die Skizzen aus den Teilen a und c ein.
- Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass $X \leq 0,2$, unter der Bedingung $X \leq 0,5$.