

Mathematik II für Biologen

Zusatzblatt (Abgabe optional am 12.7.2013)

Aufgabe 47 (Abi 1985, Ba-Wü)

(10 Zusatzpunkte)

- a) Fünf ideale Würfel werden gleichzeitig geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse,
A: Die Würfel zeigen die gleiche Augenzahl,
B: Alle Würfel zeigen verschiedene Augenzahlen,
C: Die Würfel zeigen entweder die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 2, 3, 4, 5, 6.
- b) Ein idealer Würfel wird 10mal geworfen. X beschreibe die Anzahl der dabei auftretenden Sechsen. Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X]$ und die Varianz $\text{Var}(X)$. Ermitteln Sie diejenigen Werte von X , welche im Intervall $[E[X] - 3\sigma(X), E[X] + 3\sigma(X)]$ liegen. ($\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$)
Der Würfel wird n mal geworfen. Y beschreibe die Anzahl der dabei auftretenden Sechsen. Wie groß muß n mindestens sein, damit das Intervall $[E[Y] - 3\sigma(Y), E[Y] + 3\sigma(Y)]$ im Intervall $[0, n]$ enthalten ist?
- c) Um zu untersuchen, ob bei einem gegebenen Würfel die Augenzahl 6 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ auftritt, wird dieser 300mal geworfen und die Anzahl der Sechsen gezählt.
(i) Wie lauten die Hypothesen?
(ii) Welche Zufallsvariable wird bei diesem Test betrachtet?
(iii) Wie ist diese Zufallsvariable bei zutreffender Nullhypothese verteilt?
(iv) Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich für das Signifikanzniveau 5%. (Sie dürfen dazu die Verteilung der Teststatistik durch eine Normalverteilung annähern.)
(v) Wie wird aufgrund einer Stichprobe vom Umfang 300 entschieden, wenn 60 Sechsen auftreten?
(vi) Welcher Fehler kann dabei begangen werden?
(vii) Wie groß ist dieser Fehler, wenn die Wahrscheinlichkeit für Sechsen 0,2 beträgt?
- d) Ein idealer Würfel wird 450mal geworfen. Dabei beschreibe die Zufallsvariable Z die relative Häufigkeit der Augenzahl 6.
Berechnen Sie näherungsweise den zu $E[Z]$ symmetrischen Bereich, in den die relative Häufigkeit der Augenzahl 6 mit 95%iger Wahrscheinlichkeit fällt.
Wie oft muss man werfen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,90 die relative Häufigkeit der Augenzahl 6 um höchstens 0,05 von $\frac{1}{6}$ abweicht?