Beispiel Potenzmenge

$$\Omega = \{a, b, c\}$$

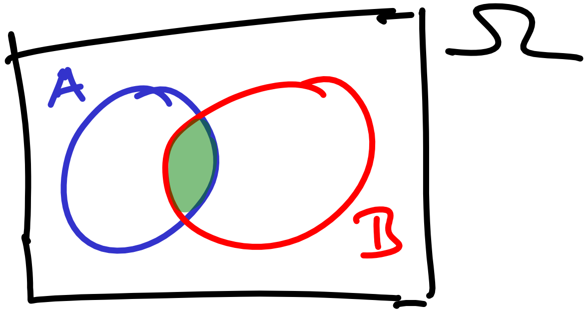
$$\Sigma = \mathcal{P}(\Omega) = \text{"Menge aller Teilmengen"}$$

$$= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \Omega\}$$

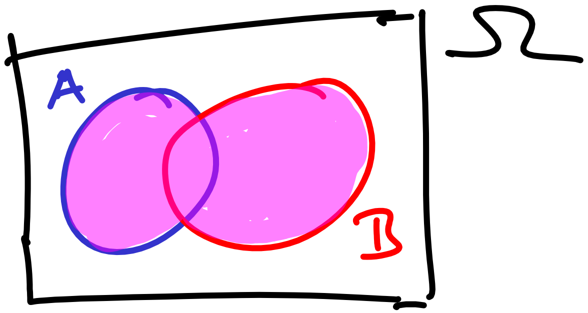
leere Menge

$\{a, b, c\}$

Elemente von $\mathcal{P}(\Omega)$ sind selbst Mengen

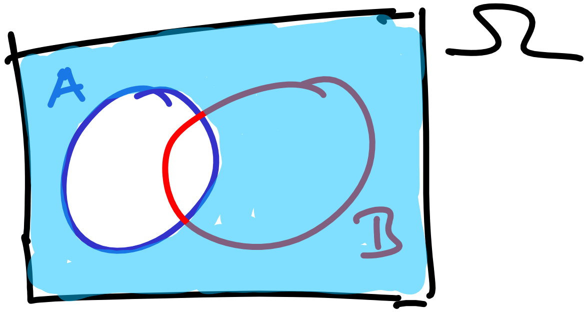


$A \cap B$



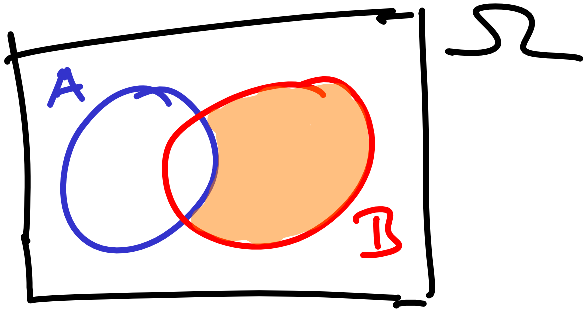
$A \cup B$

(A, B disjunkt $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \emptyset$)



$A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$

Komplement, Gegenereignis



$B \setminus A = \{\omega \in B \text{ und } \omega \notin A\}$

Laplacescher W'Raum

Wahrscheinlichkeit für jedes Elementarereignis gleich groß

$$\omega_1, \omega_2 \in \Omega : \mathbb{P}[\omega_1] = \mathbb{P}[\omega_2]$$

Ereignis $A \subset \Omega$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{\text{Anzahl der Elemente von } A}{\text{Anzahl der Elemente von } \Omega}$$

$$= \frac{\text{„Anzahl günstiger Fälle"}}{\text{„Anzahl möglicher Fälle"}}$$

Würfel

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$A = \{1,3,5\}, \quad B = \{3,4,5,6\}$

- Laplace-Würfel (fairer Würfel)

  $P[A] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P[B] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

- "unfairer Würfel", z.B.

  $P[\{1\}] = \frac{1}{12}, \quad P[\{6\}] = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

  $P[\{j\}] = \frac{1}{6}, \quad j = 2,3,4,5$

  erfüllt auch (1) & (2), aber nicht Laplace'sch

  $P[A] = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$

  $P[B] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Beweis für Folgerung

(i) $\mathbb{P}[A \cup A^c] = \mathbb{P}[\Omega] \underset{(1)}{=} 1$

$\underset{(2)}{=} \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[A^c]$

$\Rightarrow \mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$

(ii) $\mathbb{P}[\emptyset] \underset{(i)}{=} 1 - \mathbb{P}[\Omega] = 0$

(iii) $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A \cup (B \setminus A)]$

$\underset{(2)}{=} \mathbb{P}[A] + \underbrace{\mathbb{P}[B \setminus A] + \mathbb{P}[A \cap B]} - \mathbb{P}[A \cap B]$

$\underset{(2)}{=} \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[\underbrace{(B \setminus A) \cup (A \cap B)}_{= B}] - \mathbb{P}[A \cap B]$

Beispiel Würfel (für (:::))

$$A = \{1, 3, 5\}, \quad B = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$P[A \cup B] = P[\{1, 3, 4, 5, 6\}]$$

$$= \frac{5}{6} \quad \text{für Laplace-Würfel}$$

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

$$= P[\{1, 3, 5\}] + P[\{3, 4, 5, 6\}] + P[\{3, 5\}]$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Beispiel für bedingte W'schheiten

Würfel: A, B wie oben

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[\{3,5\}]}{P[\{3,4,5,6\}]}$$

$$= \frac{2/6}{4/6} = \frac{1}{2}$$ Laplace-Würfel

$$P[B|A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]} = \frac{P[\{3,5\}]}{P[\{1,3,5\}]}$$

$$= \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$

Beweis zum Satz von Bayes

$$P[A_j \mid B] = \frac{P[A_j \cap B]}{P[B]} \cdot \frac{P[A_j]}{P[A_j]}$$

$$= \frac{P[B \mid A_j] \cdot P[A_j]}{P[B]}$$

so auch oft nützlich

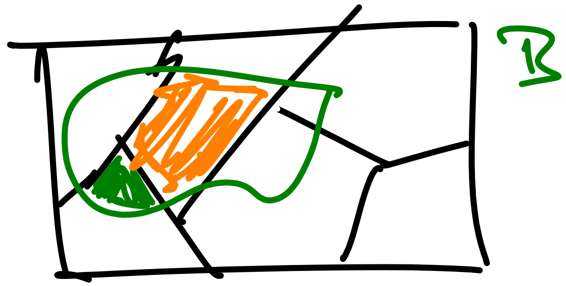
$$= \frac{P[B \mid A_j] \cdot P[A_j]}{P[B \cap \Omega]}$$

da A_j disjunkt

$$= \frac{P[B \mid A_j] \cdot P[A_j]}{P[B \cap (\bigcup_{k=1}^{n} A_k)]}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{n} \underbrace{(B \cap A_k)}_{\text{auch disjunkt}}$$

$$= \frac{P[B \mid A_j] \cdot P[A_j]}{\sum_{k=1}^{n} P[B \cap A_k]}$$



$$= \frac{P[B \mid A_j] \cdot P[A_j]}{\sum_{k=1}^{n} P[B \mid A_k] \cdot P[A_k]} \qquad \square$$

Beispiel Diagnostischer Test

$$\mathbb{P}[A_1 | B] = ?$$

$$\mathbb{P}[A_1] = 0{,}01$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[A_2] = 0{,}99 \qquad (\text{da } A_2 = A_1^c)$$

$$\mathbb{P}[B | A_1] = 0{,}98$$

$$\mathbb{P}[B^c | A_2] = 0{,}95 \Rightarrow \mathbb{P}[B | A_2] = 0{,}05$$

$$\mathbb{P}[A_1 | B] = \frac{\mathbb{P}[B|A_1]\,\mathbb{P}[A_1]}{\mathbb{P}[B|A_1]\,\mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[B|A_2]\,\mathbb{P}[A_2]}$$

$$= \frac{0{,}98 \cdot 0{,}01}{0{,}98 \cdot 0{,}01 + 0{,}05 \cdot 0{,}99} = \frac{98}{98 + 495} \approx \frac{1}{6}$$

A_b : Anton wurde begnadigt

B_b : Brigitte —— " ——

C_b : Clemens —— " ——

B_g : Brigitte wurde gehenkt

C_g : Clemens —— " ——

$$\mathbb{P}[A_b \mid B_g] = ?$$

$$\mathbb{P}[A_b] = \mathbb{P}[B_b] = \mathbb{P}[C_b] = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}[B_g \mid A_b] = \frac{1}{2} = \mathbb{P}[C_g \mid A_b]$$

$$\mathbb{P}[B_g \mid B_b] = 0 = \mathbb{P}[C_g \mid C_b]$$

$$\mathbb{P}[B_g \mid C_b] = 1 = \mathbb{P}[C_g \mid B_b]$$

$$P[A_b \mid B_g] = \frac{P[B_g \mid A_b] \cdot P[A_b]}{P[B_g \mid A_b] \cdot P[A_b] + P[B_g \mid B_b] \cdot P[B_b] + P[B_g \mid C_b]\, P[C_b]}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1/6}{1/6 + 1/3} = \frac{1}{3}$$

$$P[C_b \mid B_g] = 1 - P[A_b \mid B_g] = \frac{2}{3}$$