Fakultät

$$0! := 1$$

$$n! = n \cdot (n-1)! \quad \forall\, n \geq 1$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

Urnenmodell: ohne Zurücklegen, mit Beachtung d. Reihenf.

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n!\cdot 1} = 1 \qquad \text{(i)}$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = n \qquad \text{(ii)}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-\underline{k})!\,\underline{k}!} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-\underline{(n-k)})!\,\underline{(n-k)}!} \qquad \text{(iii)}$$

$$\binom{n}{k} := 0 \quad \text{für} \quad k > n$$

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{3}\cdot 2\cdot 1} = 56$$

$$\Rightarrow \binom{n}{n} = 1 \quad (\text{aus (i) \& (iii)})$$

$$\binom{n}{n-1} \underset{\text{(iii)}}{=} \binom{n}{1} \underset{\text{(ii)}}{=} n$$

Herleitung Binomialverteilung

Bsp: $(n=9)$

$$P[+--+++-++] = P[+]^6 \cdot P[-]^3$$

$$= \underbrace{p^6 \cdot (1-p)^3}_{\text{Wahrscheinlichkeit für genau diese Sequenz}}$$

andere Möglichkeiten für $6\times$ "+" und $3\times$ "–"
durch anderes Anordnen der +/– - Zeichen

hier: 9 Elemente, davon je 6 "+" und 3 "–"

$$\Rightarrow \frac{9!}{6!\,3!} = \binom{9}{6} \text{ Möglichkeiten}$$

<u>allgemein</u> n Elemente, k "+", $n-k$ "−"

$\Rightarrow \binom{n}{k}$ Möglichkeiten

Wahrsch. f. <u>eine</u> solche Sequenz $p^k(1-p)^{n-k}$

Binomialtest : Spermasexing

① H_0 : $p = 0{,}7$

② H_A : $p > 0{,}7$ (will Hersteller beweisen)

③ Teststatistik $X = \#♀$ bei $n = 12$ Versuche

④ Verteilung von X unter H_0

$$X \sim \text{Bin}(\underbrace{12}_{n}\,;\,\underbrace{0{,}7}_{p})$$

⑤ Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$

⑥ Verwerfungsbereich $K = ?$

so dass $\mathbb{P}_{H_0}[X \in K] \leq \alpha = 5\%$

$$\mathbb{P}_{H_0}[X = 12] = \binom{12}{12}(0{,}7)^{12} \cdot (0{,}3)^{0} = 0{,}7^{12} \approx 1{,}38\,\%$$

$$\mathbb{P}_{H_0}[X = 11] = \binom{12}{11}(0{,}7)^{11} \cdot (0{,}3)^{1} = 12 \cdot 0{,}7^{11} \cdot 0{,}3 \approx 7{,}12\,\%$$

$\Rightarrow K = \{12\}$

7. $X = 11$ (tatsächliches Ergebnis)

8. Testentscheidung: H_0 wird nicht verworfen

---

alternativ mit p-Wert

1. – 5. bleibt

6. entfällt

7. bleibt

8. entfällt (zunächst)

9. p-Wert: $P_{H_0}[X \geq 11] \approx 8{,}5\,\%$

10. Testentscheidung: $p\text{-Wert} > \alpha$

d.h. H_0 wird nicht verworfen

andere Schreibweise für VI:

$$p = \frac{X}{n} \pm 2\sqrt{\frac{1}{n}\,\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right)}$$

95% - VI für Binomialtest und Faustregel