Nachtrag Vorzeichentest Waage

① H_0 : Waage geeicht

② H_A : Waage nicht geeicht

③ $T = \#\{\text{Werte} < 20\}$

④ $T \sim \text{Bin}(10, \frac{1}{2})$, ⑤ Signifikanzniveau 5%

mit p-Wert

⑦ $T = 1$

beidseitig

⑨ $$\left(P[T \leq 1]\right) \cdot 2 = \left[\binom{10}{0} \cdot \overbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{0}}^{\text{immer } \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{, hier } n=10} + \binom{10}{1} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{9} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1}\right] \cdot 2$$

$$= \left[\binom{10}{0} + \binom{10}{1}\right] \left(\tfrac{1}{2}\right)^{9} = (1 + 10) \cdot \frac{1}{512} \approx 2\%$$

⑩ H_0 wird verworfen auf Signifikanzniveau 5%

Erwartungswert für $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P[X=k]$$

$$= \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n} \underbrace{k \cdot \binom{n}{k}}_{} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$k \cdot \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

$$= n \binom{n-1}{k-1}$$

$$= n \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-(k+1)}$$

$$= np \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k}}_{=1}$$

da Summe aller Wahrsch. für eine $\mathrm{Bin}(n-1,p)$-verteilte ZV

Linearität von $E[\cdot]$

$$E[aX+bY] = \sum_{k,l} (ak+bl)\, P[X=k \text{ und } Y=l]$$

$$= a \sum_{k,l} \underset{=}{k}\, P[X=k \underbrace{\text{ und } Y=l}_{\text{egal}}] + b \sum_{k,l} \underset{=}{l}\, P[\underbrace{X=k \text{ und }}_{\text{egal}} Y=l]$$

$$= a \sum_{k} k\, P[X=k] + b \sum_{l} l\, P[Y=l]$$

$$= a\, E[X] + b\, E[Y]$$

Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X-E[X])^2] = E[\underset{=}{X^2} - 2\underset{=}{X}\, E[X] + E[X]^2]$$

$$\underset{\text{Linearität}}{=} E[X^2] - 2E[X]\, E[X] + E[X]^2$$

$$= E[X^2] - 2E[X]^2$$

Erwartungstreue

① Mittelwert $\quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad , \quad x_i \rightsquigarrow X_i$

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \underset{\text{Lin.}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E[X_i]}_{\substack{\text{alle gleich}\\ = E[X]}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X] = E[X]$$

② empirische Varianz

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2$$

zunächst umschreiben

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2\frac{x_i}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j + \frac{1}{n^2}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2}_{=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\Big[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j + \underbrace{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k}_{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k}\Big]$$

$$= -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_i^2}{n} - \frac{2 x_i x_j}{2n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2$$

jetzt $x_i \to X_i$

$$E\left[\frac{1}{2n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_i - X_j)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\underbrace{E[X_i^2]}_{=E[X^2]} - 2\underline{E[X_i X_j]} + \underbrace{E[X_j^2]}_{E[X^2]}\Big)$$

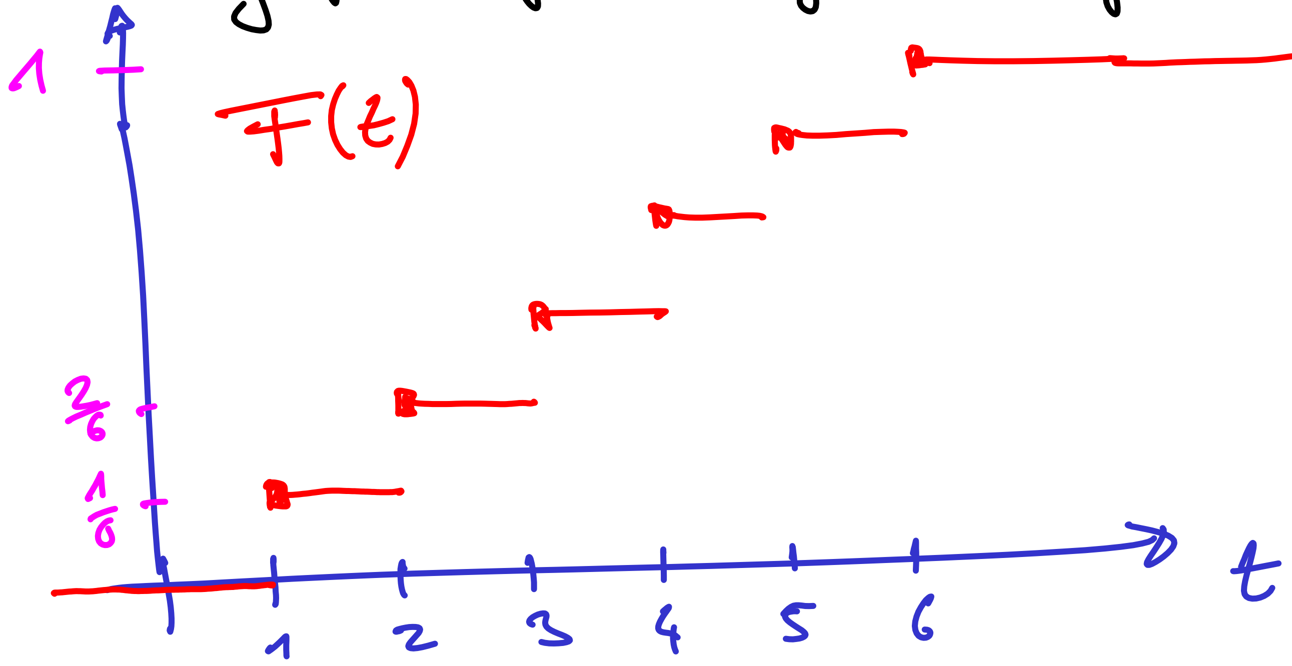
$$E[X_i X_j] = \begin{cases} E[X_i] \cdot E[X_j], & i \neq j \quad \leftarrow n^2 - n \text{ mal} \\ E[X_i^2], & i = j \quad \leftarrow n \text{ mal} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2n(n-1)} \left(n^2 E[X^2] - 2(n^2-n) E[X]^2 - 2n E[X^2] + n^2 E[X^2] \right)$$

$$= \frac{1}{2n(n-1)} \left((2n^2 - 2n) E[X^2] - 2(n^2-n) E[X]^2 \right)$$

$$= E[X^2] - E[X]^2 = Var(X)$$

Verteilungsfkt. für Erg. eines fairen Würfelwurfs



Aufgabe 34 erst bis 21.6.13