$$E[X_i] = \mu \quad , \quad Var(X_i) = \sigma^2$$

für große n

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$E[Y] = E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] \underset{\text{linear}}{=} E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]$$

$$= n\mu$$

X_i unabhängig

$$Var(Y) = Var(X_1 + \dots + X_n) = Var(X_1) + \dots + Var(X_n) = n\sigma^2$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) = \frac{1}{n} Y \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{1}{n} Y\right] = \frac{1}{n} E[Y] = \mu$$

$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n} Y\right) = \frac{1}{n^2} Var(Y) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Teststatistik beim z-Test

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}, \quad \overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

wir wissen $E[\overline{X}] = \mu_0$, $Var(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

(unter Annahme von H_0)

$$z \sim N(0, 1)$$

$$E[z] = E\left[\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} E\left[\overline{X}-\mu_0\right]$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(E[\overline{X}] - \mu_0\right) = 0$$

$$Var(z) = Var\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \frac{n}{\sigma^2} Var(\overline{X}-\mu_0)$$

$$= \frac{n}{\sigma^2} Var(\overline{X}) = 1$$

VI beim t-Test

$H_0: \mu = \mu_0 \quad (H_A: \mu \neq \mu_0)$

H_0 wird nicht verworfen falls

$t_{df, 1-\alpha}$

$$-t < \underbrace{\frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}}_{= T} < t$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{ts}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu_0 < \frac{ts}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{ts}{\sqrt{n}} > \mu_0 - \bar{X} > -\frac{ts}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{X} + \frac{ts}{\sqrt{n}} > \mu_0 > \bar{X} - \frac{ts}{\sqrt{n}}$$

Wilcoxon-Test

Summe aller Ränge

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n}{2}(n+1)$$

Hälfte der d_i pos., Hälfte neg. und
(betragsmäßige) Abweichungen gleich groß

$$\Rightarrow \quad U^- \approx U_4 = \frac{1+2+\dots+n}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$$