Universitiät Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2013

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 3 (Abgabe ausnahmsweise bis spätestens Freitag 10.05.2013, 9:00 Uhr, durch Einwurf in die orange Mappe vor C6P43)

Aufgabe 12 (10 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen alle Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 13 (10 Punkte)

a) Führen Sie die HAT für Matrix B aus Aufgabe 12 durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix U mit zugehöriger Diagonalmatrix $D = \overline{U}^T BU$ an.

b) Berechnen Sie e^{Cx} für $x \in \mathbb{R}$ und C aus Aufgabe 12.
Hinweis: Bringen Sie die Matix C mit Hilfe einer HAT in Diagonalform.

Aufgabe 14 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \qquad \phi \in \mathbb{R}.$$

b) Zeigen Sie: Ist $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär und gilt $U\vec{x} = \lambda\vec{x}$ für ein $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, so folgt: $|\lambda| = 1$.

Aufgabe 15 (10 Zusatzpunkte)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch und habe die verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_r$ $(r \leq n)$ mit Vielfachheiten $n_1, ..., n_r$ $(\sum_{j=1}^r n_j = n)$. Weiter seien $\vec{u}_k^j$, $k = 1, ..., n_j$ orthonormale Eigenvektoren zu λ_j. Wir definieren

$$P_j := \sum_{m=1}^{n_j} \vec{u}_m^j \, \overline{\vec{u}_m^j}^T.$$

Zeigen Sie:

a) $P_j P_l = \delta_{jl} P_l$, d.h. insbesondere $P_j^2 = P_j$

b) $\overline{P_j}^T = P_j$

c) $\sum_{j=1}^r P_j = I$

d) $\sum_{j=1}^r \lambda_j P_j = A$

Hinweis zu c) und d): Jedes $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ lässt sich als $\vec{x} = \sum_{j=1}^r \sum_{m=1}^{n_j} a_{jm}\vec{u}_m^j$ darstellen mit geeigneten $a_{jm} \in \mathbb{C}$. (Warum?)

Aufgabe 16 (vgl. `http://spikedmath.com/517.html`) (10 Zusatzpunkte)
Wir definieren eine Hyperbel als die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die der Betrag der Differenz der Abstände zu zwei gegebenen Punkten, genannt Brennpunkte, gleich ist. Als Brennpunkte wählen wir $(\pm f, 0)$ und als Betrag der Differenzen der Abstände $2a$ mit $0 < a < f$.

a) Drücken Sie die in der Definition genannte Bedingung, die die Punkte (x, y) erfüllen müssen, als eine Gleichung aus (die dann die Parameter f und a enthält).
b) Bringen Sie die Gleichung aus (a) auf die Form
$$\frac{x^2}{\dots} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$
Drücken Sie $b > 0$ als Funktion von f und a aus.
c) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Hyperbel mit der x-Achse.
d) Bestimmen Sie $m := \lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{|y|}{|x|}$ für Punkte (x, y) auf der Hyperbel.
Welche Rolle spielen die Geraden $y = \pm mx$ beim Zeichnen der Hyperbel?
e) Zeichnen Sie die Hyperbel für $f = 5$ und $a = 3$.

Aufgabe 17 (10 Zusatzpunkte)
Erreichen Sie bis spätestens 8.6.13 auf `www.khanacademy.org` *Proficiency* in den *Skills Equation of a hyperbola* und *Recognizing conic sections.*