Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2013

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 4 (Abgabe am 16.05.2013)

Aufgabe 18 (Fibonacci-Zahlen) (10 Punkte)
Sei $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ \forall\ n \geq 2$. Sei weiter

$$\vec{b}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} .$$

a) Finden Sie eine 2×2-Matrix A, so dass $\vec{b}_{n+1} = A\,\vec{b}_n$.
b) Berechnen Sie A^n (durch HAT) und bestimmen Sie damit $\vec{b}_n$ sowie a_n explizit.

Aufgabe 19 (10 Punkte)
Bestimmen Sie alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix U mit zugehöriger Diagonalmatrix $D = \overline{U}^T A U$ an.

Aufgabe 20 (10 Punkte)
Bringen Sie die quadratischen Formen in den folgenden Gleichungen auf Hauptachsen, geben Sie an, was für Kegelschnitte die Gleichungen beschreiben, und zeichnen Sie sie.

a) $6x^2 - 2\sqrt{3}xy + 4y^2 = 1$
b) $3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 = 8$
c) $x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 = 1$
d) $5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 8$

Aufgabe 21 (10 Punkte)

a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Zeigen Sie: $\det A = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j$.
b) Gegeben sei die quadratische Form ($\vec{x} = (x, y, z)^T$)

$$q_A(\vec{x}) = x^2 + 10y^2 + z^2 - 4y(x+z) + 2axz\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Für welche Werte von a ist q_A positiv definit? Welche Definitheitseigenschaften hat q_A für andere Werte von a?