Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2013

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 5 (Abgabe ausnahmsweise bis spätestens Mittwoch 29.05.2013, 14:00 Uhr, durch Einwurf in die orange Mappe vor C6P43)

Aufgabe 22 (10 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad x^2+y^2>0 \\ 0 & , \quad x=y=0 \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie: Die Funktion f ist stetig. Hinweis: $|xy| \leq x^2+y^2$ (warum?)
b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f.
c) Berechnen Sie alle Richtungsableitungen von f in $\vec{0}$.
d) Ist f total differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 23 (10 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{xy} + z^3 - xyz$.

a) Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen von f (d.h. f_x, f_y, f_z, f_{xx}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yx}, f_{yy}, f_{yz}, f_{zx}, f_{zy} und f_{zz}. Ist f total differenzierbar?
b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{x}_0 = (-1,0,\pi)^T$ in Richtung von $(0,-1,1)^T$.
c) Berechnen Sie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\vec{x}(t))$ für die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$.
Vergleichen Sie das Ergebnis an der Stelle $t = \pi$ mit dem Ergebnis aus Teil b.

Aufgabe 24 (10 Punkte)
Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$ für $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ und die Wege

a) $\mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$,
b) $\mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \pi]$ und
c) $\mathfrak{K}_3$: Die geradlinige Verbindung von $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ nach $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Geben Sie auch jeweils Anfangs- und Endpunkt des Integrationswegs an.
Ist f konservativ? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 25 (10 Punkte)

Man nennt

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}\,, \quad A \in \mathbb{C}^{n\times n}\,,$$

ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordung mit konstanten Koeffizienten. Dabei sind die Elemente von $\vec{y}$ Funktionen von x, und $\vec{y}\,'$ ist die komponentenweise Ableitung nach x, d.h.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}\,, \quad \vec{y}\,' = \frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}\,.$$

a) Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $\vec{u}$, so ist

$$\vec{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\,\vec{u}$$

eine Lösung des DGL-Systems.

b) Zeigen Sie: Jedes $\vec{y}$ der Form

$$\vec{y}(x) = \mathrm{e}^{Ax}\,\vec{b}\,, \quad \vec{b} \in \mathbb{C}^n \text{ beliebig,}$$

ist eine Lösung des DGL-Systems. Welchen Wert nimmt $\vec{y}(0)$ an?

c) Lösen Sie das AWP $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = (2\ 0\ 1\ 1)^T$, mit A aus Aufgabe 19.