Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2013

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 6 (Abgabe am 6.6.2013)

Aufgabe 26 (10 Punkte)

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{x}$ für

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^{xy} + 2x\cos(x^2+z^2) \\ x\mathrm{e}^{xy} \\ 2z\cos(x^2+z^2) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin^3(\frac{t}{4}) \\ \log(1+t) \\ \frac{t}{\sqrt{\pi}} \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi\,.$$

Aufgabe 27 (10 Punkte)

Sei $\vec{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten x, y, z. Wir möchten uns die folgende Menge veranschaulichen,

$$T := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2 = \tfrac{1}{4} \right\}.$$

a) Zeichnen Sie zunächst die Schnittmengen mit den drei Koordinatenebenen, z.B. ist $T_{xy} := \{\vec{x} \in T \mid z = 0\}$ die Schnittmenge mit der xy-Ebene.
b) Zeichnen Sie nun $T \subset \mathbb{R}^3$.
c) Erklären Sie kurz, wie Sie von den Ergebnissen in (a) zu der Zeichnung in (b) gelangt sind.

Aufgabe 28 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1-y^2}$ um $(0,0)$.
b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklungen im Ursprung bis einschließlich des quadratischen Terms von $f(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1-y^2}$ und $g(x,y,z) = \cosh(y) + \mathrm{e}^{2xy} + \sin(xyz)$.
c) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung um den Punkt $(0,-1,1)$ von

$$f(x,y,z) = z^3 - 3z^2 + x^2 + 4yx + 2y + 4z - 4\,.$$

Hinweis: Sie müssen nicht ableiten.

Aufgabe 29 (10 Punkte)

Schreiben Sie die DGL 2. Ordnung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (*)$$

um auf ein DGL-System 1. Ordnung. Definieren Sie dazu

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix},$$

und suchen Sie eine Matrix A, so daß $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ äquivalent zu $(*)$ wird. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und vergleichen Sie mit dem charakteristischen Polynom der DGL $(*)$.
Bemerkung: Das Umschreiben auf ein System funktioniert analog für DGLn beliebiger Ordnung (auch nichtlineare), sehen Sie wie?