Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2013

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 7 (Abgabe am 13.6.13)

Aufgabe 30 (10 Punkte)
Ist das folgende Vektorfeld konservativ? Geben Sie ggf. eine Stammfunktion an.

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z\cos(xz) - \mathrm{e}^{y-x^2} \\ \mathrm{e}^y \displaystyle\int_x^0 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ x\cos(xz) \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie außerdem $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$ für $\mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$ und skizzieren Sie $\mathfrak{K}$.

Aufgabe 31 (10 Punkte)
Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion

$$f(x,y) = xy\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$$

d.h. alle Punkte mit $\nabla f = 0$. Untersuchen Sie, ob dort Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 32 (10 Punkte)

a) Ist $y + xy^2 - \mathrm{e}^{xy} = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0) mit $x_0 = 0$ und geeignetem y_0 nach $y = f(x)$ auflösbar? Berechnen Sei ggf. auch $f'(0)$.

b) Zeigen Sie, dass sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 + \cos(y_1 y_2) &= y_2 x_1 + 1 \\ \sin y_1 &= x_2 + y_2 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, -1, 0, 1)$ nach $\vec{y} = f(\vec{x})$, d.h.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

auflösen lässt, und berechnen Sie $f'(0, -1)$.

Aufgabe 33 (10 Punkte)
Für welche $(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ ist die Funktion

$$f(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} x(r,\vartheta,\varphi) \\ y(r,\vartheta,\varphi) \\ z(r,\vartheta,\varphi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

lokal umkehrbar?[1] Berechnen Sie auch ${f^{-1}}'(0, -2, 0)$.

---

[1] Das heißt wo existiert eine Funktion $f^{-1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} r(x,y,z) \\ \vartheta(x,y,z) \\ \varphi(x,yz) \end{pmatrix}$?

Aufgabe 34 (10 Zusatzpunkte)

Wenn Sie $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ als vektorwertigen Differentialoperator betrachten, können Sie auch Skalarprodukte und, im $\mathbb{R}^3$, das Kreuzprodukt bilden (vgl. Taylor).

Man definiert für $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto (f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))^T$ und $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \quad \text{(Divergenz)} \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \text{(Rotation)}$$

Berechnen Sie (wo möglich) $\operatorname{div} \vec{f}$, $\operatorname{rot} \vec{f}$, $\operatorname{grad} V$, $\operatorname{div} \operatorname{grad} V$ und $\operatorname{rot} \operatorname{grad} V$ für

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ x - z \\ 2z\, \mathrm{e}^{z^2} - y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,.$$