Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2013

# Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 8 (Abgabe am 20.6.2013)

---

**Aufgabe 35** (10 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2-2x+2y}$.

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von $f$.
b) Bestimmen Sie alle potentiellen Extremstellen von $f$ unter der Nebenbedingung $x^2+y^2 = 9$. Können Sie entscheiden, ob es sich tatsächlich um Minima oder Maxima handelt?
c) Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 9\}$. Bestimmen Sie $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ und $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$.

Hinweis: Denken Sie neben Satz 36 auch an Satz 27.

**Aufgabe 36** (10 Punkte)
Sei $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z$. Bestimmen Sie den größten und den kleinsten Wert, den die Funktion $f$ auf der Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ annimmt.

**Aufgabe 37** (10 Zusatzpunkte)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und ansonsten beliebig. Bestimmen Sie Minimum und Maximum der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \vec{x} \mapsto \vec{x}^T A\vec{x}$ unter der Nebenbedingung $|\vec{x}| = 1$.
Hinweis: $|\vec{x}| = 1 \;\Leftrightarrow\; |\vec{x}|^2 = 1$.

**Aufgabe 38** (10 Punkte)
Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Ellipse

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad a,b \in \mathbb{R}^+ .$$

**Aufgabe 39** (10 Punkte)
Bestimmen Sie die Masse $m$ des inhomogenen Einheitswürfels $W = [0,1]^3$ mit Dichte

$$f(x,y,z) = x^2 z\,\mathrm{e}^{xyz} + z\,\mathrm{e}^{xz},$$

d.h. berechnen Sie $m := \int_W f \,\mathrm{d}V$.