Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2013

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 9 (Abgabe am 27.6.2013)

Aufgabe 41 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie das Volumen des Ellipsoids

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^+ .$$

b) Berechnen Sie das Volumen einer Kugelschale mit Innenradius R und Dicke d, d.h. berechnen Sie $|K| = \int_K \mathrm{d}V$ für

$$K := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, R \leq |\vec{x}| \leq R + d \right\} .$$

Bestimmen Sie auch $\lim\limits_{d \to 0} \frac{|K|}{d}$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 42 (Zylinderkoordinaten) (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Volumenelement $\mathrm{d}V$ in Zylinderkoordinaten (r, φ, z), definiert durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad (x, y, z: \text{ kartesisch}) .$$

b) Bestimmen Sie das Volumen von $K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq z,\ 0 \leq z \leq 4 \right\}$, und zeichnen Sie K.

Aufgabe 43 (10 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen der folgenden Teilmenge von $\mathbb{R}^3$

$$\left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \begin{pmatrix} (1 + r\sin u)\cos v \\ (1 + r\sin u)\sin v \\ r\cos u \end{pmatrix},\ 0 \leq r \leq \tfrac{1}{2},\ 0 \leq u < 2\pi,\ 0 \leq v < 2\pi \right\} .$$

Was für ein Objekt wird durch diese Parametrisierung beschrieben?

Aufgabe 44 (parabolische Zylinderkoordinaten) (10 Punkte)

Sei $\vec{x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\vec{x}(q_1, q_2, q_3) = \begin{pmatrix} q_1 q_2 \\ \frac{1}{2}(q_2^2 - q_1^2) \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (x, y, z: \text{ kartesisch}) .$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{x}$ für alle q_1, q_2, q_3 mit $q_1^2 + q_2^2 \neq 0$ lokal invertierbar ist – dort also krummlinige Koordinaten definiert werden.

b) Wie lautet das Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ in diesen Koordinaten?

c) Sei $\widetilde{K} = \{\vec{q} \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq q_j \leq 1,\ j = 1, 2, 3\}$ und $K = \vec{x}(\widetilde{K})$. Zeichnen Sie K und berechnen Sie das Volumen $|K|$.