Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2013

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 10 (Abgabe am 4.7.2013)

Aufgabe 45 (10 Punkte)
Berechnen Sie die Oberfläche des Torus T aus den Aufgaben 27 und 43.

Aufgabe 46 (10 Punkte)
Bestimmen Sie die Oberfläche des Sattels

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 2\,,\ z = x^2 - y^2 \right\}$$

sowie den Fluss von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$ durch S.
Hinweis: Ebene Polarkoordinaten, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$, sind hilfreich.

Aufgabe 47 (10 Punkte)
Berechnen Sie $\oint_{\mathfrak{K}} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{x}$ für

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3y + \cos^2(x^2+z^2) \\ \log(2+y^2) + 7x \\ \tanh(x^2+y^2+z^2) \end{pmatrix}\,;$$

dabei sei $\mathfrak{K}$ der im Uhrzeigersinn durchlaufene Einheitskreis in der xy-Ebene.

Aufgabe 48 (10 Punkte)
Bestimmen Sie jeweils den Fluss (von innen nach außen) der Vektorfelder $\vec{v}_1(\vec{x}) = \vec{x}$ und $\vec{v}_2(\vec{x}) = (-y, x, 0)^T$ durch die Oberfläche des Torus T aus den Aufgaben 27, 43 und 45.

Aufgabe 49 (10 Punkte)

a) Sei $\Omega = \{m, a, t, h\}$. Bestimmen Sie jeweils $\mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_j, \Omega)$ für
$\mathcal{M}_1 = \{\{m\}\}$, $\mathcal{M}_2 = \{\{m\}, \{a\}\}$ und $\mathcal{M}_3 = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ mit } |A| = 2\}$.

b) Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{M}_1$ die Menge aller offenen Intervalle (a,b) aus $\mathbb{R}$ sowie
$\mathcal{M}_2$ die Menge aller abgeschlossenen Intervalle $[a,b]$ aus $\mathbb{R}$.
Zeigen Sie: Die erzeugten σ-Algebren sind gleich[2], d.h. $\mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_1, \Omega) = \mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_2, \Omega)$.

---

[2] Es handelt sich nämlich in beiden Fällen um die Borel-σ-Algebra über $\mathbb{R}$.