Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2013

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 11 (Abgabe am 11.7.2013)

Aufgabe 50 (10 Punkte)

a) Nach dem Verpacken von sechs verschiedenen Geschenken kann Georg den Inhalt nicht mehr erkennen. Eines war für Klaus, zwei für Lothar und drei für Susanne. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zufälliger Verteilung der Geschenke (in der richtigen Anzahl!) jeder die richtigen erhält?

b) Wir zeigen: Sind die Ereignisse A_j, $j = 1, \dots, n$ paarweise unabhängig, d.h.

$$P(A_j \cap A_k) = P(A_j)\, P(A_k) \quad \forall\, j \neq k$$

so folgt daraus **nicht** $P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) = \prod_{j=1}^{n} P(A_j)$.
Beispiel: Ein fairer Würfel werde zweimal geworfen. Wir betrachten die Ereignisse
$A_1 =$ "der erste Wurf liefert eine gerade Zahl",
$A_2 =$ "der zweite Wurf liefert eine ungerade Zahl" und
$A_3 =$ "die Summe der beiden Augenzahlen ist gerade".
Berechnen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 51 (10 Punkte)

Eine Krankheit trete bei 1% der Bevölkerung auf (Prävalenz). Ein Labortest liefert bei 98% der Kranken ein positives Ergebnis (Sensitivität). Derselbe Test liefert bei 95% der Gesunden ein negatives Ergebnis (Spezifität). Wir möchten folgende Frage beantworten:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (einer zufällig getesteten Person), krank zu sein, wenn der Test positiv ist?

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Geben Sie wie beim Gefangenenparadoxon aus der Vorlesung eine geeignete Ergebnismenge Ω an.

Bezeichnen Sie mit A_1 das Ereignis, dass die untersuchte Person die Krankheit hat, mit A_2 das Ereignis, dass die untersuchte Person die Krankheit nicht hat (also $A_2 = A_1^C$) und mit B das Ereignis, dass der Test positiv ausfällt.

b) Geben Sie alle Wahrscheinlichkeiten und alle bedingten Wahrscheinlichkeiten an, die sich unmittelbar aus dem Aufgabentext ergeben.

c) Bestimmen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe des Satzes von Bayes.

d) Geben Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Test bei einer zufällig ausgewählten Person positiv ausfällt.

Aufgabe 52 (10 Zusatzpunkte)

Drei Schützen treffen sich zu einem Duell. Sie ordnen sich an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks an und vereinbaren die folgenden Regeln: Den ersten Schuss hat A, dann B, dann C, dann wieder A und so weiter. Ist einer getroffen, so setzen die anderen beiden das Duell fort. Die Trefferwahrscheinlichkeit von A ist 0,3, die von B 1,0 und die von C 0,5. Jeder Schütze entscheidet, wenn er an der Reihe ist, selbst, wohin er den Schuss richtet – auf einen der Gegner oder in die Luft. Alle sind gute Mathematiker und treffen immer die Entscheidung, die ihnen maximale Überlebenschancen verspricht. Wohin richtet A seinen ersten Schuss? Wie hoch sind die Überlebenschancen für A, B und C?

Aufgabe 53 (20 Zusatzpunkte)

Erreichen Sie bis spätestens 18.7.13 auf `www.khanacademy.org` *Proficiency* in den *Skills Basic set notation*, *Probability space*, *Independent probability*, *Dependent probability*, *Permutations and combinations* und *Probability with permutations and combinations*.

Aufgabe 54 (10 Punkte)

Wir betrachten Ereignisse (im Alltagsinn des Wortes), die mit gleicher Wahrscheinlichkeit an jeder Stelle eines gegebenen Bereiches auftreten können, z.B. Gewitter in Deutschland innerhalb eines Monats (Ereignis: Gewitter, Bereich: Zeitintervall "ein Monat"), Regentropfen, die auf eine Fläche der Größe 1m^2 treffen (Ereignis: Auftreffen eines Regentropfens an der Stelle x, Bereich: die Fläche), Zerfälle von radioaktiven Atomen pro Jahr in 1kg Plutonium (Ereignis: Zerfall eines Atoms, Bereich: Zeitintervall "ein Jahr").

Die Zufallsvarible X zähle die Anzahl der Ereignisse pro Bereich (z.B. Gewitter pro Monat, Regentropfen pro m^2, oder Zerfälle pro Jahr). Es sei bekannt, dass $E(X) = \lambda > 0$, d.h. im Mittel treten im angegeben Bereich λ Ereignisse auf. Wie ist X verteilt?

Gehen Sie zur Beantwortung der Frage wie folgt vor. Unterteilen Sie den Bereich in n gleich große Teile ($n > \lambda$), nummeriert mit $i = 1, \ldots, n$. In jedem Teil i finde mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ genau eines der Ereignisse statt (p gleich für alle i) und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ keines.

a) Wie ist X nun verteilt?
b) Wie müssen Sie p wählen, um $E(X) = \lambda$ zu erfüllen?
c) Führen Sie nun den Limes $n \to \infty$ durch (warum?), und zeigen Sie daduch, dass $X \sim \text{Pois}(\lambda)$.

Hinweis: Es ist unterwegs sinnvoll, $b(k; n, \frac{\lambda}{n})$ wie folgt zu schreiben,

$$b(k; n, \tfrac{\lambda}{n}) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k},$$

und dann den Limes $n \to \infty$, k fest, durchzuführen.