Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2013

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 12 (Abgabe am 18.7.13)

Aufgabe 55 (10 Punkte)

a) Sei $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$. Bestimmen Sie $\mathrm{Var}(X)$.

b) Sei $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. Bestimmen Sie $\mathrm{Var}(Y)$.

Hinweis: Die Erwartungswerte Binomial- und Poisson-verteilter ZV haben wir in der Vorlesung berechnet, $E(X) = np$ und $E(Y) = \lambda$.

Aufgabe 56 (10 Zusatzpunkte)
Seien X_j, $j = 1, ..., N$, unabhängig binomialverteilte ZV, genauer $X_j \sim \mathrm{Bin}(n_j, p)$. Sei außerdem $Y := \sum_{j=1}^N X_j$. Bestimmen Sie $E(Y)$ und $\mathrm{Var}(Y)$. Wie ist Y verteilt?

Aufgabe 57 (10 Zusatzpunkte)
Die Zufallsvariable X beschreibe die Dauer von Handy-Gesprächen eines Teenagers. X habe die Dichte (t in Minuten gemessen)

$$f_X(t) = \begin{cases} c\mathrm{e}^{-t/5} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

a) Bestimmen Sie die Konstante c so, daß f_X tatsächlich eine Dichte ist.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Gespräch
   (i) länger als 5 Minuten dauert?
   (ii) zwischen 5 und 6 Minuten dauert?
   (iii) genau 6 Minuten dauert?

d) Bestimmen Sie $E(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$.

Aufgabe 58 (10 Punkte)

Sie würfeln einmal mit einem (fairen) zwanzigseitigen Würfel und bestimmen so den Wert der Zufallsvariablen X_1 (d.h. $X_1(\Omega) = \{1, 2, \ldots, 20\}$). Erhalten Sie beim ersten Wurf eine 1, so würfeln Sie nochmals mit demselben Würfel und bestimmen so den Wert von X_2. Für $2 \leq X_1 \leq 11$ würfeln Sie mit einem (fairen) sechsseitigen Würfel und bestimmen so den Wert von X_2. In allen anderen Fällen ($X_1 \geq 12$) würfeln Sie nicht noch einmal – der Wert von X_2 ist dann Null.

a) Sind X_1 und X_2 stochastisch unabhängig? Falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

b) Bestimmen Sie $P(X_2{=}4)$ und $P(X_2{\geq}3)$.

c) Berechnen Sie $E(X_2)$ und $\mathrm{Var}(X_2)$.

Aufgabe 59 (Gesetz der großen Zahlen) (10 Zusatzpunkte)

Wir möchten die folgende Frage beantworten:

Wie oft muss man mit einem fairen Würfel würfeln, damit die relative Häufigkeit für das Ergebnis ⚅ mit 95%iger Wahrscheinlichkeit um weniger als 10% von $\frac{1}{6}$ abweicht?

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Sei X die Anzahl der ⚅ aus n Würfen. Wie ist X verteilt? Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X)$.
- Definieren Sie $Y := \frac{X}{n}$. Bestimmen Sie $E(Y)$ und $\mathrm{Var}(Y)$.
- Wenden Sie die Tschebyscheffsche Ungleichung für Y an, um eine Antwort auf die Ausgangsfrage zu erhalten.

Für große n besagt der Zentrale Grenzwertsatz, dass die Zufallsvariable Y näherungsweise normalverteilt ist, d.h. $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, mit den oben berechneten Werten für den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2. Für normalverteilte Zufallsvariablen Z, d.h. $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, gilt $P(|Z - \mu| < 2\sigma) \approx 95\%$. Verbessern Sie damit Ihr Ergebnis von oben.