Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2013

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Klausur am 30.07.2013

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 98 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (3+4+8 = 15 Punkte)
Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\int x \sinh(x)\,\mathrm{d}x$ Hinweise: $\sinh'(x) = \cosh(x)$, $\cosh'(x) = \sinh(x)$.

b) $\displaystyle\int \sinh^2(x)\,\mathrm{d}x$ Hinweis: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

c) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{x-1}{(x+3)^2(x+7)}\,\mathrm{d}x$ Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y'\,\mathrm{e}^y + \sin x = 0$, $y(\pi) = 0$.

Aufgabe 3 (4+4+4 = 12 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ von $y'' + 3y' + 2y = 0$.
b) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 3y' + 2y = 2\mathrm{e}^{-3x}$.
c) Lösen Sie das AWP $y'' + 3y' + 2y = 2\mathrm{e}^{-3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Aufgabe 4 (3+2+5 = 10 Punkte)
Sei

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.
b) Gegen Sie zu jedem Eigenwert von A einen Eigenvektor an.
c) Berechnen Sie A^{2013}.

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Bringen Sie die quadratische Form in

$$5(x^2 + y^2) + 6xy = 8$$

auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und zeichnen Sie ihn.

Aufgabe 6 (10+4 = 14 Punkte)

Sei $f(x,y) = x^2 - y^2 - (x^4 - y^4)/2$.

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f, d.h. alle (x,y) mit $(\nabla f)(x,y) = 0$. Untersuchen Sie, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.
b) Ist $f(x,y) = 0$ in einer Umgebung von $(x_0, y_0) = (\pi, -\pi)$ nach y auflösbar, definiert dort also eine Funktion $y = g(x)$? Bestimmen Sie ggf. auch $g'(\pi)$.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$ für $f(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ entlang der Kardioide

$$\mathfrak{K} \,:\, \vec{x}(t) = (1+\cos t)\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi\,.$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\int_0^{2\pi} \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \pi$.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Masse der inhomogenen Einheitskugel mit Dichte

$$\varrho(x,y,z) = 2 - \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,$$

d.h. berechnen Sie

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \le 1} \varrho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Aufgabe 9 (8 Punkte)

Berechnen Sie die Oberfläche des Hyperboloids

$$\mathcal{H} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = \sqrt{1-(x^2+y^2)},\ x^2+y^2 \le 1 \right\}$$

Hinweis: Ebene Polarkoordinaten sind hilfreich.

Aufgabe 10 (1+2+4+4 = 11 Punkte)

Bei einem Radrennen werden Dopingtests durchgeführt. Ist ein Fahrer gedopt, so fällt der Test mit Wahrscheinlichkeit 90% positiv aus. Ebenso fällt er bei einem ungedopten Fahrer mit Wahrscheinlichkeit 90% negativ aus.

a) Ein gedopter Sportler werde zweimal getestet.
   (i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Tests positiv ausfallen?
   (ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer der Tests positiv ausfällt?
b) Bei dem Rennen seien 20% der Fahrer gedopt. Bei einem zufällig ausgewählten Fahrer wird ein Dopingtest durchgeführt. Dieser falle positiv aus.
   (i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Fahrer gedopt ist?
   (ii) Bei diesem Fahrer werde ein zweiter Test durchgeführt. Dieser falle ebenfalls positiv aus. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Fahrer gedopt ist?