Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2013

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 10.10.2013

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 108 Punkte erreichbar, 88 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 44 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+4+8 = 16 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int x^\alpha \log x \, \mathrm{d}x\,, \quad \alpha \neq -1$

b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\log x}{x} \, \mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{4x^2 - 2x + 2}{(x^2-1)^2} \, \mathrm{d}x$ Hinweis: Partialbruchzerlegung

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y' + \pi \mathrm{e}^x = y\mathrm{e}^x$, $y(0) = \pi$.

Aufgabe 3 (4+2+4 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ von $y'' - y' - 2y = 0$.
b) Lösen Sie das AWP $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = \pi$, $y'(0) = -\pi$.
c) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' - y' - 2y = \mathrm{e}^{-x}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Bringen Sie die quadratische Form in

$$-3x^2 + 8xy + 3y^2 = 5$$

auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und zeichnen Sie ihn.

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Die 2×2-Matrix A besitze die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\vec{u}_1 = (1, -1)^T$ und $\vec{u}_2 = (1, 1)^T$. Wie lautet die Matrix A?

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$f(x,y) = y^2 - \cos(x)\,,$$

d.h. alle (x,y) mit $(\nabla f)(x,y) = 0$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 7 (2+6+2 = 10 Punkte)

Sei $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_j \geq 0 \ \forall \ j = 1, \ldots, n$ sowie

$$f(\vec{x}) = -\sum_{j=1}^{n} x_j \log x_j \qquad \text{und} \qquad g(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j\,.$$

Wir suchen Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(\vec{x}) = 1$.

a) Definieren Sie eine geeignete Lagrange-Funktion L.
b) Leiten Sie aus L die Bestimmungsgleichungen für potentielle Extremstellen ab und lösen Sie diese.
c) Was ist der Funktionswert von f an der potentiellen Extremstelle?

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x z^2 \mathrm{e}^{xyz} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z\,.$$

Aufgabe 9 (10+4 = 14 Punkte)

Sei $\vec{x} = (x,y,z)^T$,

$$\mathcal{T} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} (1 + r\sin u)\cos v \\ (1 + r\sin u)\sin v \\ r\cos u \end{pmatrix}, \begin{array}{c} 0 \leq r \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq u < 2\pi \\ 0 \leq v < 2\pi \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x - \sin(y) \\ xz^2 + y \\ \cos(x) + z \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Volumen von $\mathcal{T}$, d.h. $\int_{\mathcal{T}} \mathrm{d}V$
b) Bestimmen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch die Oberfläche von $\mathcal{T}$, d.h. $\int_{\partial\mathcal{T}} \vec{v} \cdot \vec{n}_a \,\mathrm{d}O$, wobei die Normale $\vec{n}_a$ nach außen zeige.

Aufgabe 10 (9+3 = 12 Punkte)

Ein fairer Würfel wird dreimal geworfen. Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

$A :=$ “Es wird mindestens einmal ⚁ gewürfelt.”
$B :=$ “Es wird genau zweimal ⚄ gewürfelt.”

a) Berechnen Sie $P(A)$, $P(B)$ sowie $P(A \cap B)$.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zweimal ⚄ gewürfelt wird, unter der Bedingung, dass mindestens einmal ⚁ gewürfelt wurde.