Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

SS 2013
19.04.2013
Blatt 1

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

Übungen zu „Mathematik für Physiker 4“ und „Ergänzungen zu Mathematik für Physiker 4“

1. (4 Punkte) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld auf G. Man definiert dann *den zu f gehörenden Differentialoperator* $X_f : \mathcal{C}^1(G) \to \mathcal{C}(G)$ durch

$$X_f(g) = \sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

   Sei nun φ ein dynamisches System auf G mit Vektorfeld f. Eine stetig differenzierbare Funktion $H : G \to \mathbb{R}$ heißt *ein 1. Integral für φ* (oder *eine Bewegungsinvariante für φ*), wenn gilt: Für alle $x \in G$ und alle $t \in I(x)$ ist $H(x(t)) = H(x)$. Nun zeigen Sie: Es ist eine Funktion H auf G genau dann 1. Integral für φ, wenn gilt: $X_f(H) = 0$. (Hinweis: $X_f(H)(x) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} H \circ x(t)$)

2. (4 Punkte) Sei $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $G = D \times \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^6$ der Phasenraum für das Kepler-Problem $\ddot{x} = -x/|x|^3$. Zeigen Sie, dass die Abbildungen $L : G \to \mathbb{R}^3$ und $E : G \to \mathbb{R}$,

$$L(x, y) = x \times y, \quad E(x, y) = \frac{1}{2}|y|^2 - \frac{1}{|x|}$$

   Bewegungsinvarianten sind.

3. (4 Punkte) Bestimmen Sie das dynamische System φ von $\dot{x} = x^2$ auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4 ist für die Ergänzungsvorlesung zu bearbeiten.

4. (4 Punkte) Sei $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Trennung der Variablen die Lösung von $\dot{x} = a(t)x$ auf $\mathbb{R}$ zum Anfangswert x_0.

Abgabe: Freitag, 26.04.2013, 9 Uhr in der Vorlesung