Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

SS 2013
24.05.2013
Blatt 5

Übungen zu „Mathematik für Physiker 4“ und „Ergänzungen zu Mathematik für Physiker 4“

1. (4 Punkte) Berechnen Sie das Volumen eines Volltorus (d.i. das Innere eines Schwimmreifens) mit Radien $0 < r < R$. (Hinweis: Blatt 4, Aufgabe 1)

2. Sei $G = (0,1) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subseteq \mathbb{R}^3$ und $\Phi : G \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(r, \varphi, \theta) = (r \cos\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\theta).$$

   a) (2 Punkte) Berechnen sie die Jacobische $J_\Phi : G \to (0, \infty)$ und zeigen Sie, dass Φ ein Diffeomorphismus von G auf sein Bild $D := \Phi(G)$ ist.

   b) (2 Punkte) Berechnen Sie nun mit Hilfe der Transformationsformel das Volumen der Kugelschale $(0 \leq r \leq R \leq 1)$

$$A = \{x \in \mathbb{R}^3 : r \leq |x| \leq R\}.$$

3. (4 Punkte) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Es sei

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$$

   der Graph von f. Zeigen Sie, dass $\varphi : G \to \Gamma_f \subseteq \mathbb{R}^{k+1} : x \mapsto (x, f(x))$ eine regulär parametrisierte Untermannigfaltigkeit ist und zeigen Sie, dass für die Jacobische J_φ gilt:

$$J_\varphi = \sqrt{1 + |\mathrm{grad}(f)|^2}$$

Aufgabe 4 ist für die Ergänzungsvorlesung zu bearbeiten.

4. (4 Punkte) Sei $m \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Ist $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $p(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$, $p(\lambda) = \lambda^m - a_{m-1}\lambda^{m-1} - \ldots - a_1\lambda - a_0$, so ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto e^{\lambda_0 t} z_0$ für jedes $z_0 \in C$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung m-ter Ordnung

$$z^{(m)} = a_0 z + a_1 \dot{z} + \ldots + a_{m-1} z^{(m-1)}$$

   auf $\mathbb{C}$.

Abgabe: Freitag, 31.05.2013, 11 Uhr in der Vorlesung