Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

SS 2013
07.05.2013
Blatt 7

Übungen zu
„Mathematik für Physiker 4" und
„Ergänzungen zu Mathematik für Physiker 4"

1. Zeigen Sie, dass

$$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) : A^t A = E_n\}$$

eine kompakte $\frac{1}{2}n(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ ist wie folgt:

   a) (2 Punkte) Betrachten Sie

   $$F : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) : A^t = A\} : A \mapsto A^t A - E_n$$

   und zeigen Sie, dass für das Differential $DF(A) : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$

   $$DF(A)(B) = A^t B + B^t A$$

   gilt.

   b) Zeigen Sie für $A \in O_n(\mathbb{R}) = F^{-1}(0)$, dass $DF(A)$ surjektiv ist und schließen Sie daraus die Behauptung.

2. (4 Punkte) Sei $\omega_n > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel $\mathbb{B}^n$, $\omega_n = \lambda(\mathbb{B}^n)$. Zeigen Sie für den Oberflächeninhalt τ_{n-1} von $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\tau_{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$:

$$\tau_{n-1} = n\omega_n.$$

(Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Gauß mit dem Vektorfeld $X = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.)

3. (4 Punkte) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand M, $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ ihr äußeres Einheitsnormalenfeld und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir bezeichnen mit $D_\nu f : M \to \mathbb{R}$ ihre *Normalenableitung entlang* M, d.h.:

$$D_\nu f(x) := \langle \mathrm{grad}(f)(x), \nu(x)\rangle.$$

Beweisen Sie nun folgende *Integralformel von Green*: Sind $f, g : K \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_K (f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f)\, dV = \int_{\partial K} (f \cdot D_\nu g - g \cdot D_\nu f)\, dS.$$

(Hinweis: Divergenzsatz mit dem Vektorfeld $X = f \cdot \mathrm{grad}(g) - g \cdot \mathrm{grad}(f)$)

Aufgabe 4 ist für die Ergänzungsvorlesung zu bearbeiten.

4. Die Populationen eines Räuber-Beute-Modells werden mit $x \in \mathbb{R}_+$ für die Beute (z.B Mäusen) und $y \in \mathbb{R}_+$ für die Räuber (z.B. Katzen) bezeichnet. Das einfachste Modell für die Entwicklung von (x, y) wird durch die *Räuber-Beute-Gleichung* von Volterra und Lotka gegeben,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (a - by)x \\ \dot{y} &= (cx - d)y \end{aligned}$$

mit $a, b, c, d > 0$. Hierbei wird von einem unbeschränktem Wachstum (mit Rate $a > 0$) der Beute in Abwesenheit der Räuber ausgegangen (also $\dot{x} = ax$), welche durch das Aufeinandertreffen von Räuber und Beute proportional zur Anzahl von Räubern und Beute (mit Rate $b > 0$) dezimiert wird, also $\dot{x} = ax - bxy$. (Ähnlich für die Population y des Räubers.)

   a) (2 Punkte) Man bestimme die Gleichgewichtslage $p = (x_0, y_0)$ des Systems und zerlege $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ durch die Geraden $\{x = x_0\}$ und $\{y = y_0\}$ in vier Quadranten. Dann mache man sich klar, dass sich die Bahnen $t \to (x(t), y(t))$ um die Gleichgewichtslage herumwinden.

   b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion $H(x, y) = cx - d \ln x + by - a \ln y$ ein 1. Integral ist und daher alle Bahnen (außer der Gleichgewichtslage) periodisch sind.

Abgabe: Freitag, 14.06.2013, 11 Uhr in der Vorlesung