

Übungen zu „Mathematik für Physiker 4“ und „Ergänzungen zu Mathematik für Physiker 4“

1. a) Seien f und g holomorph auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ und sei $p \in G$. Weiter sei $g(p) = 0$, aber $g'(p) \neq 0$. Zeigen Sie, dass für $h(z) := f(z)/g(z)$ gilt: $\operatorname{Res}_p h = f(p)/g'(p)$.
b) Bestimmen Sie die Singularitäten der folgenden Funktionen und dort ihre Residuen:

$$h_1(z) = \frac{1}{z(z - \pi)^2}, \quad h_2(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}.$$

2. Zeigen Sie, dass der Cauchysche Integralsatz, die Cauchysche Integralformel und auch die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel Spezialfälle des Residuensatzes sind.
3. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

4. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die periodische Funktion mit

$$f(x) = \frac{1}{4}(x - \pi)^2, \quad \text{für } 0 \leq x < 2\pi.$$

- a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von f .
- b) Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Keine Abgabe