Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

SS 2013
03.05.2013
Blatt 3

Übungen zu
„Mathematik für Physiker 4“ und
„Ergänzungen zu Mathematik für Physiker 4“

1. a) (2 Punkte) Sei λ das Borel-Lebesguesche Maß auf der Borel-Algebra von $\mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Geben Sie eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ an, die $\mathbb{Q}$ enthält und deren Maß $\lambda(U)$ kleiner als ε ist.

   b) (2 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ die Borelalgebra und $\lambda : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathcal{B}$. Sei weiter $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Zeigen Sie, dass H eine Borelsche Nullmenge ist, d.h. $H \in \mathcal{B}$ und $\lambda(H) = 0$. (Hinweis: Sei $\varepsilon > 0$. Überdecken Sie H nur so sparsam mit Quadern Q_k ($k \in \mathbb{N}$), dass $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(Q_k) \leq \varepsilon$ ist.)

2. (4 Punkte) Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Ein maximales Orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ in X heißt eine *Basis* von X.

   Sein nun $X = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ der Hilbertraum der quadratsummierbaren Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $e_n \in X$ die Folge, die an der $n-$ten Stelle eine Eins und sonst nur Nullen hat, also $e_n = (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Basis von X ist.

3. Die *Cantormenge* C entsteht iterativ so: Im ersten Schritt nimmt man aus $C_0 := [0, 1]$ das mittlere Drittel heraus, $C_1 := C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Im zweiten Schritt nimmt man aus den verbleibenden Intervallen $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$ wiederum das jeweils mittlere Drittel heraus, $C_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Bei jedem weiteren Schritt nimmt man aus den verbleibenden Intervallen jeweils wieder das mittlere Drittel heraus und erhält im n-ten Schritt C_n. Schließlich setzt man $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

   a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass C eine Borelmenge und $\lambda(C) = 0$ ist.

   b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass C überabzählbar ist. (Hinweis: Man beschreibe alle Zahlen in $[0, 1]$ im triadischen System.)

Aufgabe 4 ist für die Ergänzungsvorlesung zu bearbeiten.

4. Sei A ein komplexe $n \times n$ Matrix, $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ und $z_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von A zu einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A, $Az_0 = \lambda z_0$.

   a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto e^{\lambda t} z_0$ Lösung von $\dot{z} = Az$ auf $\mathbb{C}^n$ zum Anfangswert z_0 ist.

   b) (2 Punkte) Zeigen Sie: Ist A eine reelle Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine Lösung von $\dot{z} = Az$ auf $\mathbb{C}^n$, so sind $\mathrm{Re}(\varphi), \mathrm{Im}(\varphi) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ Lösungen von $\dot{x} = Ax$ auf $\mathbb{R}^n$.

Abgabe: Freitag, 10.05.2013, 11 Uhr in der Vorlesung