Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

SS 2013
10.05.2013
Blatt 4

Übungen zu „Mathematik für Physiker 4“ und „Ergänzungen zu Mathematik für Physiker 4“

1. a) (2 Punkte) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Kreiskegel mit einer Grundscheibe vom Radius $r > 0$ und einer Höhe $h > 0$. Berechnen Sie mit Cavalieris Prinzip das Volumen von K.

   b) (2 Punkte) Sei $f : [a, b] \to [0, \infty) : x \mapsto f(x)$ eine stetige Funktion und $K \subseteq \mathbb{R}^3$ der Rotationskörper, der entsteht, wenn man den Graphen von f um die x-Achse rotiert. Zeigen Sie, dass für das Borel-Lebesguesche Maß von K gilt:
$$\lambda(K) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

2. (4 Punkte) Der *Schwerpunkt* $S = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ eines (kompakten) Körpers $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ist definiert durch
$$s_j := \frac{1}{\lambda(K)} \int_K x_j\, dx$$
($j = 1, 2, 3$), wo $\lambda(K)$ das Volumen von K bezeichnet. Berechnen Sie den Schwerpunkt der Halbkugel $\mathbb{B}^+ = \{x \in \mathbb{B}^3 \mid x_3 \geq 0\}$.

3. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. f heißt *wesentlich beschränkt*, wenn es ein $c > 0$ gibt, so dass $N = \{x \in X : |f(x)| > c\}$ eine Nullmenge ist. Man notiert dann mit $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ die Menge aller wesentlich beschränkten, messbaren Funktionen auf X und definiert schließlich $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{L}^\infty(\mu) \to [0, \infty)$ durch
$$\|f\|_\infty := \inf\{c > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > c\}) = 0\}$$
das *essentielle Supremum* von f.

   a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und $\|\cdot\|_\infty$ auf $L^\infty(\mu) = \mathcal{L}^\infty(\mu)/\mathcal{N}(\mu)$ eine Norm definiert (wo $\mathcal{N}(\mu)$ den Unterraum der messbaren Funktionen bezeichnet, die μ-fast-überall gleich Null sind).

   b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ sogar ein Banachraum ist. (Hinweis: Für eine Cauchyfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ betrachten Sie nur $x \in X$, wo $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$ und $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist.)

Aufgabe 4 ist für die Ergänzungsvorlesung zu bearbeiten.

4. (4 Punkte) Sei $I \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) : t \mapsto A(t)$ stetig differenzierbar und $\Phi : I \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine Lösungskurve von $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$ auf $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $\Delta : I \to \mathbb{R} : t \mapsto \det(\Phi(t))$ dann Lösung von $\dot{x} = \mathrm{spur}(A(t))x$ auf $\mathbb{R}$ ist. (Hinweis: Zeigen Sie für $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, dass $(\det \Phi)^{\cdot} = \sum_{j=1}^n \det(\varphi_1, \ldots, \dot{\varphi}_j, \ldots, \varphi_n)$)).

Abgabe: Freitag, 17.05.2013, 11 Uhr in der Vorlesung