Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

SS 2013
27.07.2013

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

Klausur zu „Mathematik für Physiker 4“

Aufgabe 1: Betrachten Sie für $a, b \in \mathbb{R}_+$ das Kompaktum

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

und seinen Rand, die Ellipse $C = \partial K$.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt A von K gilt:

$$A = \pi ab$$

b) (2 Punkte) Drücken Sie die Länge L der Ellipse C durch ein Riemannintegral aus, dessen Integrand die Quadratwurzel aus einer rationalen Funktion ist.

Aufgabe 2: Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{\|x\|}$.

a) (2 Punkte) Berechnen Sie zunächst das Vektorfeld $E = \operatorname{grad}(\varphi) : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ und dann die Divergenz $\operatorname{div} E : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie nun den Fluss Φ des Feldes E durch die Oberflächen $S(r)$ der Kugeln $B_r(0)$ für jedes $r > 0$,

$$\Phi = \int_{S(r)} \langle E, \nu \rangle \, dS.$$

(Beachten Sie, dass E im Nullpunkt nicht definiert ist.)

Aufgabe 3:

a) (2 Punkte) Welche der beiden folgenden Funktionen $f, g : \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ist holomorph und welche nicht? Begründen Sie:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2, 0), \quad g(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

b) (2 Punkte) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holmorph mit $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in D$. Zeigen Sie, dass f konstant sein muss.

Aufgabe 4:

a) (2 Punkte) Sei $D := \mathbb{C} \setminus \{-ix \in \mathbb{C} : x \in [0, \infty)\}$. Definieren Sie den Zweig f der Quadratwurzel auf D mit $f(1) = 1$, also die holomorphe Abbildung $f = \sqrt{} : D \to \mathbb{C}$ mit $(\sqrt{z})^2 = z$ und $\sqrt{1} = 1$. (Hinweis: Definieren Sie zunächst einen geeigneten Zweig des Logarithmus auf D.)

b) (2 Punkte) Was ist an der folgenden Rechnung falsch:

$$-1 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1.$$