Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

SS 2013
08.10.2013

Nachklausur zu „Mathematik für Physiker 4“

Aufgabe 1: Die sogenannte Pendelgleichung wird durch die folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\ddot{x} + \sin(x) = 0.$$

a) (1 Punkt) Beschreiben Sie diese Gleichung als ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung auf $\mathbb{R}^2$. Welches Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gehört zu dem dynamischen System?

b) (1 Punkt) Zeigen Sie: Die Funktion $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}y^2 - \cos x$ ist ein 1. Integral für die Bewegung.

c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass das System auf $\mathbb{R}^2$ auch durch die folgenden Gleichungen beschrieben wird:

$$\dot{x} = \frac{\partial E}{\partial y}(x, y), \quad \dot{y} = -\frac{\partial E}{\partial x}(x, y).$$

d) (1 Punkt) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslagen des dynamischen Systems auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2: Seien $R, H > 0$, $G := (0, 2\pi) \times (0, H) \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\Phi : G \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(\vartheta, t) = (R\cos\vartheta, R\sin\vartheta, t).$$

a) (1 Punkt) Berechnen Sie die Jacobische $J_\Phi : G \to \mathbb{R}$ von Φ.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass Φ eine reguläre Parametrisierung ist (d.h. Φ ist injektiv und immersiv).

c) (1 Punkt) Sei $Z \subseteq \mathbb{R}^3$ das Zylinderstück

$$Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2,\ 0 \leq z \leq H\}.$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt von Z.

– Bitte wenden –

Aufgabe 3: Die komplex-hyperbolischen Funktionen $\cosh, \sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ werden definiert durch:

$$\cosh(z) := \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right), \quad \sinh(z) := \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right).$$

a) (1 Punkt) Begründen Sie, warum cosh und sinh holomorph sind und zeigen Sie

$$\cosh' = \sinh, \quad \sinh' = \cosh.$$

b) (1 Punkt) Beweisen Sie die Additionstheoreme für cosh und sinh, d.i. für alle $z, w \in \mathbb{C}$

$$\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$$
$$\sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w).$$

c) (1 Punkt) Zeigen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\cosh(iz) = \cos(z), \quad \sinh(iz) = i\sin(z).$$

d) (1 Punkt) Zeigen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die folgende Zerlegung in Real- und Imaginärteil:

$$\cosh(x+iy) = \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y)$$
$$\sinh(x+iy) = \sinh(x)\cos(y) + i\cosh(x)\sin(y).$$

Aufgabe 4: Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}.$$

a) (1 Punkt) Begründen Sie, warum f holomorph ist.

b) (1 Punkt) Begründen Sie, warum $z_0 = 0$ und $z_1 = 1$ Pole von f sind und bestimmen Sie die Polstellenordnungen von f in z_0 und z_1.

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Residuen von f in z_0 und z_1.

d) (1 Punkt) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : t \mapsto 2e^{it}$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma f(z)\, dz.$$