Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 2

Aufgabe 1: ($\{a,b\},\{c,d\}$ je ein $\times$)

Leite folgende Funtionen ab.

a) $f_1(x) = \frac{\sqrt{x}\sin(x)}{\ln(x)}$,

b) $f_2(x) = \sqrt{\exp(\sin(\sqrt{x}))}$,

c) $f_3(x) = (1+x^2)^{\sin(x)}$,

d) $f_4(x) = \sqrt{x^x + \cos^2(\sqrt{x})}$.

Aufgabe 2: ($\{a\},\{b\}$ je ein $\times$)

a) Bestimme ein Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^4 a_k x^k$, sodass

$$\left.\frac{d^k p}{dx^k}\right|_{x=0} = \left.\frac{d^k \cos(x)}{dx^k}\right|_{x=0}, \quad \text{für} \quad k = 0,\dots,4.$$

b) Sei $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Zeige dass,

$$a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{also} \quad p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{p^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Aufgabe 3: Differenzierbarkeit ($\times$)

Skizzieren Sie die Funktionen $f, g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x\sin(1/x) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Sind f und g stetig bei Null? Sind sie dort auch differenzierbar? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4: Mittelwertsatz (*,$\times$)

a) Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie: Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist f konstant.

b) Seien $a,b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist.

Tipp: Beachten Sie den Aufgabentitel!

Aufgabe 5: Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema (*,$\times$)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^2(I)$. Zeigen Sie: Gilt bei $x_0 \in I$

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) < 0 \quad (\text{bzw. } f''(x_0) > 0)\,,$$

so hat f bei x_0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum).