Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 3

Aufgabe 1: Ableitungen ($\times$)

Seien die reellen Funktionen f_1 und f_2 definiert durch

$$f_1(x) = \frac{u(x)}{(v(x))^n}, \quad f_2(x) = \ln\left(\prod_{n=1}^{N} g_n(x)\right),$$

wobei $u(x), v(x)$ und $g_n(x)$ differenzierbare Funktionen sind. Berechne die Ableitung von f_1 und f_2. Wo sind die Funktionen und ihre Ableitungen definiert?

Aufgabe 2: Grenzwerte ($*, \{a, b\}, \{c, d, e\}$ je ein $\times$)

Erinnerung: Die hyperbolischen Funktionen sinh und cosh sind definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}), \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}).$$

Berechne die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} (\cosh(x))^{1/x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} (\cosh(x))^{1/x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sinh^2(x)} - \frac{1}{x^2}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

Aufgabe 3: Konkave Funktionen ($\times$)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ konkav. Beweise, dass gilt

a) Jedes lokale Maximum von f ist ein globales Maximum.
b) Ist f strikt konkav, so gibt es höchstens eine Stelle eines globalen Maximums.
c) Ist f differenzierbar und $f'(x_0) = 0$, so ist x_0 Stelle eines globalen Maximums.

Hinweis: Argumentiere analog zur Behandlung konvexer Funktionen in der Vorlesung.

Aufgabe 4: Konvexe Funktionen ($*, \times$)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Beweise

$$f(x_1\lambda_1 + \ldots + x_n\lambda_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n).$$

Aufgabe 5: Partielle Ableitungen ($*, \times$)

Betrachte die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto \frac{x\,\mathrm{e}^z}{y}.$$

Berechne die partiellen Ableitungen (falls existent).

(Mit Stern markierte Aufgaben sind abzugeben.)