Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 4

Aufgabe 1: $(*, \{a, b\}, \{c\}$ je ein $\times)$

a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ derart, dass $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Zeige, dass

$$\prod_{k=1}^n a_k^{\lambda_k} \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k$$

für alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_0^+$ gilt. *Hinweis:* Verwende die Konvexität von exp.

b) Folgere aus Teil a), dass für $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ und $p, q \in \mathbb{R}^+$ mit $1/p + 1/q = 1$ stets die folgende Ungleichung gilt:

$$ab \leq \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{q}\, b^q$$

c) Seien $p, q \in \mathbb{R}^+$ mit $1/p + 1/q = 1$.

i) Sei $n \in \mathbb{N}$ sowie $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_0^+$ und $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_0^+$. Zeige, dass dann stets

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{1/q}$$

gilt. *Hinweis:* Setze $A = (a_1, \ldots, a_n)$ und $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und verwende für den Fall $\|A\|_p, \|B\|_q \neq 0$ Teil b) mit $a = a_k/\|A\|_p$ und $b = b_k/\|B\|_q$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$.

ii) Seien nun $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}_0^+$ und $b_1, b_2, \ldots \in \mathbb{R}_0^+$ derart, dass die Reihen $\sum_{k=1}^\infty a_k^p$ und $\sum_{k=1}^\infty b_k^q$ konvergent sind. Zeige, dass dann auch die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k b_k$ konvergiert und somit die Ungleichung aus i) auch für $n = \infty$ gilt.

Aufgabe 2: $(\{a, b\}, \{c\}$ je ein $\times)$

Sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Zeige, dass g in $(0,0)$ zweimal partiell differenzierbar ist, wobei die partiellen Ableitungen nach x und y nicht vertauschen.

b) Untersuche $\partial_x \partial_y g$ auf Stetigkeit im Punkt $(0,0)$.

c) Sei

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

Zeige, dass f überall partiell differenzierbar nach x und y ist, obwohl f nicht stetig ist.

Aufgabe 3: (ein $\times$)

Gegeben sei für $A \subseteq \mathbb{R}$ die Funktion

$$f : A \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{x+2}{4}\ln(x+1).$$

a) Gib den größtmöglichen Definitionsbereich A an.

b) Bestimme alle Nullstellen von f, f' und f''.

c) Bestimme alle lokalen Extrema von f.

d) Bestimme die Bereiche, in denen f konvex bzw. konkav ist.

e) Skizziere das Schaubild von f.

Aufgabe 4: ($*$, ein $\times$)

Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x,y) = \begin{pmatrix} \exp(x+y) \\ xy \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass es eine Funktion $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, sodass für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + r(x,y),$$

wobei $\frac{r(x,y)}{|x|+|y|} \to \binom{0}{0}$ für $\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}$. *Hinweis:* Benutze den Mittelwertsatz für Funktionen von $I \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Aufgabe 5: (ein $\times$)

Sei $m \in \mathbb{N}$. Gegeben sei ferner eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, welche für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung $f(tx,ty,tz) = t^m \cdot f(x,y,z)$ genügt. Zeige, dass dann stets folgende Beziehung besteht:

$$x \cdot \partial_x f(x,y,z) + y \cdot \partial_y f(x,y,z) + z \cdot \partial_z f(x,y,z) = m \cdot f(x,y,z)$$