Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 5

Aufgabe 1: (∗, ×)

Sei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis im $\mathbb{R}^3$. Der Levi-Civita-Tensor ϵ_{ijk} in dieser Basis ist gegeben durch

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & (ijk) = (123), (231), (312) \\ -1 & (ijk) = (132), (213), (321) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Mache Dir klar, dass gilt $\epsilon_{ijk} = (e_i \times e_j)_k$ und beweise damit die Identität

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}.$$

Zeige weiter die Identität $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$.

Aufgabe 2: (×)

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Beweisen Sie die folgenden Identitäten unter Verwendung der vorherigen Aufgabe:

a) Für $f \in \mathcal{C}^2(G)$ gilt rot grad$f = 0$.

b) Für $g \in \mathcal{C}^2(G, \mathbb{R}^3)$ (d.h. $\text{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}^3$) gilt div rot$g = 0$.

c) Für $g \in \mathcal{C}^2(G, \mathbb{R}^3)$ gilt rot rot$g$ = grad div$g - \Delta g$.

Aufgabe 3: (∗, ×)

Sei $f \in \mathcal{C}^2(G)$ auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ rotationssymmetrisch, d.h. es existiert eine Funktion $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, so dass $f = h \circ r$ in G mit $r(x) = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$. Zeigen Sie, dass dann auch Δf rotationssymmetrisch ist.