Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 6

Aufgabe 1: (a und b je ein $\times$,*)

Es seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(s_1, s_2) = (x_1(s_1, s_2), x_2(s_1, s_2), x_3(s_1, s_2)) = (s_1 s_2, s_1 \cos(s_2), \sin(s_2))$ und $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$. Außerdem ist $h = g \circ f$.

a) Berechne das Differential von h durch Anwendung der Kettenregel, d.h. mittels der Formel $Dh(s_1, s_2) = Dg(f(s_1, s_2)) \circ Df(s_1, s_2)$.

b) Berechne das Differential Dh mittels direktem Einsetzen und partieller Differentiation.

Aufgabe 2: (Ein $\times$)

Bestimme die Taylerpolynome der folgenden Funktionen bis zur 2. Ordnung um den jeweils angegebenen Punkt.

a) $f(x, y) = \exp(-x^2 + y)$ um den Punkt $(0, 0)$.

b) $h(x, y, z) = x^2 + 4xy - 3y^2 + y + 2xz + 3z - 4$ um den Punkt $(1, 3, -1)$.

Aufgabe 3: (Ein $\times$)

Finde die kritischen Punkte von f und g, d.h. Punkte, an denen der Gradient verschwindet.

a) $f(x, y) = 4x^2 + y^2$.

b) $g(x, y) = x^2 - 4x - y^2 + 6y - 5$.

Berechne die Hessematrix an den kritischen Punkten, und argumentiere, ob es sich hierbei um Extremalpunkte handelt.

Aufgabe 4: (Ein $\times$)

Eine *Gruppe* ist ein Paar $(G, \circ)$, wobei G eine Menge ist und $\circ$ eine Abbildung

$$\circ : G \times G \to G, \quad (g, h) \mapsto g \circ h,$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(G1) Für alle $g, h, k \in G$ gilt $(g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k)$ (Assoziativgesetz),

(G2) Es gibt ein Element $e \in G$, so dass $g \circ e = e \circ g = g$ für alle $g \in G$ (Neutrales Element),

(G3) Für alle $a \in G$ existiert ein Element g^{-1}, so dass $g^{-1} \circ g = e$ (Linksinverse).

Wir betrachten nun für $\xi \in \mathbb{R}$ die Lorentztransformationen $A_\xi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$A_\xi = \begin{pmatrix} \cosh(\xi) & \sinh(\xi) \\ \sinh(\xi) & \cosh(\xi) \end{pmatrix}.$$

Zeige unter Angabe der jeweiligen Gruppeneigenschaft (G1),(G2),(G3), dass $\mathrm{SO}(1, 1) := \{A_\xi | \xi \in \mathbb{R}\}$ eine Gruppe ist. Zeige auch, dass

$$\mathrm{SO}(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} |\alpha \in [0, 2\pi) \right\}$$

unter Angabe der jeweiligen Gruppeneigenschaft (G1),(G2),(G3) eine Gruppe ist.

Aufgabe 5: (Ein $\times$)

Berechne die Determinanten folgender Matrizen. Welche sind folglich invertierbar?

a) A_ξ aus obiger Aufgabe,

b) eines beliebigen Elements aus SO(2),

c) von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 9 \\ 3 & 7 & 10 & 3 & 17 \\ 4 & 0 & 11 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 8 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 6 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6: (a und b je ein $\times$,*)

a) Zeige, dass die Determinante einer oberen oder unteren Dreicksmatrix durch das Produkt der Diagonaleinträge gegeben ist, d.h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

b) Wie verändert sich der Wert der Determinante bei elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen? Siehe dazu Skript MaPhy I, WS 12/13 Def. 6.41.
Berechne die folgende Determinante, indem man diese durch Zeilen- und Spaltenumformungen auf Dreiecksgestalt bringt:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Aufgabe 7: (Ein $\times$)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Eigenwerte, Eigenvektoren von A und weiter die Basistransformation S, sodass $B = S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.