Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 7

Aufgabe 1: Taylor-Polynom (Ein $\times$,*)

Bestimme das Taylor-Polynom dritten Grades von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \exp(2y - x^2)$ um den Punkt $(x_0, y_0) = (2, 2)$.

Aufgabe 2: Kettenregel (Ein $\times$)

Betrachte die Funktionen

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 & f(x, y) &= (\cos(y), \cos(x)\sin(x), \sin(y)) \\ g &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 & g(x, y, z) &= (x^2 + z^2, xz - y), \end{aligned}$$

sowie deren Verkettung $h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Berechne die Differentiale Df, Dg und Dh. Verifiziere die Kettenregel durch Matrixmultiplikation.

Aufgabe 3: Lokale und globale Extrema (a und b je ein $\times$)

a) Untersuche die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 2x^3 + x^4$ auf lokale und globale Extrema.

b) Finde lokale Maxima, Minima und Sattelpunkte von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 y\, \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

Aufgabe 4: Determinante (Für A und B je ein $\times$,*)

Berechne die Determinante der folgenden $(n \times n)$-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. A ist die Matrix mit 2 auf der Diagonalen und 1 sonst, sowie B die Matrix mit 1 auf der Gegendiagonalen und 0 sonst.

Aufgabe 5: Blockmatrizen (Ein $\times$)

Zeige, dass die Blockmatrix $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in M((k+l) \times (k+l), \mathbb{R})$ mit $A \in M(k \times k, \mathbb{R})$, $B \in M(k \times l, \mathbb{R})$ und $C \in M(l \times l, \mathbb{R})$ die Determinante $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = |A| \cdot |C|$ besitzt.

Aufgabe 6: Eigenwerte und Eigenräume (Ein $\times$,*)

Berechne zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume; ist A diagonalisierbar? Wie lautet die Verallgemeinerung auf die entsprechende $(n \times n)$-Matrix, d.h. die Matrix mit den Einträgen $a_{ij} = 1$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Aufgabe 7: Symmetrische Matrix (Ein $\times$, Bonus)

Sei A eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_i, i \in \{1, \dots, n\}$.

a) Zeige, dass $\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max\{|\lambda_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}$.

b) Zeige weiterhin, dass $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} | \langle x, Ax \rangle |$.

c) Überprüfe am Beispiel von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ob a) hier gilt.

Hinweis: Ein $x \in \mathbb{R}^n$ lässt sich darstellen als $x = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ mit zueinander orthogonalen Eigenvektoren $v_i \in \mathbb{R}^n$ und Koeffizienten $c_i \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 8: Spur (Ein $\times$, Bonus)

Die Spur einer $(n \times n)$-Matrix M ist definiert durch $\operatorname{tr}(M) := \sum_{k=1}^n m_{kk}$.

a) Zeige, dass für $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ gilt $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

b) Gibt es Matrizen A, B derart, dass $AB - BA = \mathrm{id}_n$?

Die Bonusaufgaben sind freiwillig.