Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 8

Aufgabe 1: Satz über implizite Funktionen (a und b je ein $\times$)

a) Sei $F(x,y) := x^2 + y^2 - 1$. Für hinreichend kleine x lässt sich die Gleichung $F(x,y) = 0$ durch positive $y = y(x)$ auflösen. Zeige ohne explizite Auflösung, dass $y'(x) = -x/y$ ist.

b) Sei $F(x,y,z) := x^4 + 2x\cos y + \sin z$. Zeige, dass für hinreichend kleine x, y, z die Gleichung $F(x,y,z) = 0$ nach z aufgelöst werden kann und berechne für die Lösungsfunktion $z(x,y)$ die partiellen Ableitungen $\partial z/\partial x$ und $\partial z/\partial y$.

Aufgabe 2: Divergenz in Kugelkoordinaten (Ein $\times$,*)

Sei $X = (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times (0,\pi) \subset \mathbb{R}^3$ und sei $f : X \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(r,\varphi,\theta) = (r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta) =: (x(r,\varphi,\theta), y(r,\varphi,\theta), z(r,\varphi,\theta)).$$

Sei weiter $Y = f(X)$ und

$$g : Y \to X\,, \quad (x,y,z) \mapsto g(x,y,z) =: (r(x,y,z), \varphi(x,y,z), \theta(x,y,z))$$

die Inverse von f, d.h. $f \circ g : Y \to Y$ ist die Identität.

a) Bestimme jeweils die Jacobi-Matrix von f und g.

b) Bestimme analog zur Vorlesung die Divergenz in Kugelkoordinaten, d.h. schreibe für ein beliebiges stetig differenzierbares Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

die Abbildung $(\operatorname{div} v) \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ als Funktion der partiellen Ableitung von $v \circ f$.

c) Bestimme nun die Matrix für den Basiswechsel auf die den Koordinaten angepasste Basis $(e_r, e_\varphi, e_\theta)$, welche durch Normierung der Basis $(\operatorname{grad} r, \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\theta)$ entsteht.

d) Stelle schließlich das Vektorfeld $v \circ f$ bezüglich der durch die Kugelkoordinaten definierten Basis $(e_r, e_\varphi, e_\theta)$ dar, also in der Form

$$(v \circ f) = (v \circ f)_r\, e_r + (v \circ f)_\varphi\, e_\varphi + (v \circ f)_\theta\, e_\theta$$

und schreibe $(\operatorname{div} v) \circ f$ als Funktion der partiellen Ableitung von $(v \circ f)_r$, $(v \circ f)_\varphi$ und $(v \circ f)_\theta$.

Hinweis: Verwende Beispiel 2.44 aus dem Skript.

Aufgabe 3: Kommutator und gemeinsame Diagonalisierbarkeit (Ein $\times$,*)

Seien $A, B \in M(n,\mathbb{R})$ diagonalisierbar. Zeige die Äquivalenz der folgenden zwei Aussagen

a) $AB = BA$

b) A, B sind simultan diagonalisierbar, d.h. es lässt sich eine gemeinsame Basis aus Eigenvektoren finden.

Aufgabe 4: Globale Extrema (Ein $\times$)

Finde globale Extrema von $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$ auf der Menge $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$. Gehe dabei zuerst mittels Lagrange-Multiplikatoren (Maximieren/Minimieren unter Nebenbedingungen) vor und argumentiere danach geometrisch.

Aufgabe 5: Banach'scher Fixpunktsatz (Ein $\times$)

Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $r > 0$. Betrachte für stetig differenzierbares $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$\varphi : \overline{B_r(x_0)} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}.$$

Es gelte weiterhin

$$\sup_{x \in \overline{B_r(x_0)}} \left| 1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)} \right| \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq \frac{r}{2}.$$

Zeige, dass φ auf $\overline{B_r(x_0)}$ genau einen Fixpunkt besitzt. *Hinweis*: Verwende den Banach'schen Fixpunktsatz.