Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 9

Aufgabe 1: (×)

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, durch

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2-2 \\ x^2+y^2-z^2-2x \end{pmatrix}, \qquad x,y,z \in \mathbb{R}.$$

Zeige mittels Satz über implizite Funktionen, dass in einer Umgebung von $(0,1,1)$ die Gleichgung $f(x,y,z) = 0$ nach (y,z) auflösbar ist, d.h. dass in einer Umgebung um 0 eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$ und $g(0) = (1,1)$ existiert, so dass

$$f(x, g_1(x), g_2(x)) = 0.$$

Berechne $Dg(x)$ an der Stelle $x = 0$ explizit.

Aufgabe 2: (×)

Zeige, dass die Gleichung $F(x,y) := x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x = 0$ um den Punkt $(0,0)$ eine lokale C^2- Lösung $y = g(x)$ hat.

Hinweis: Zeige in Analogie zur Vorlesung, dass $F \in C^2$ auch $g \in C^2$ impliziert und berechne dann implizit die zweite Ableitung.

Aufgabe 3: (×)

Man bestimme das achsenparallele Rechteck größter Fläche welches der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ einbeschrieben ist.

Aufgabe 4: (×)

Diskutiere die Höhenlinien der Funktion $F : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = xye^{-x-y}.$$

Gehe dabei wie folgt vor:

- Bestimme die Nullstellen von $\partial_y F$ bzw. $\partial_x F$.
- Bestimme Lage und Art der lokalen Extrema von F.
- Skizziere qualitativ den Verlauf der Höhenlinien von F.
- In welchen Rechtecken $I \times J \subset [0,\infty) \times [0,\infty)$ lassen sich die Mengen

  $$\{(x,y) \in I \times J \mid F(x,y) = c\}$$

  in der Form

  $$\{(x,y) \in I \times J \mid y = \phi(x)\} \quad \text{bzw.} \quad \{(x,y) \in I \times J \mid x = \psi(y)\}$$

  mit differenzierbaren Funktionen $\phi : I \to J$ bzw. $\psi : J \to I$ darstellen?

Aufgabe 5: (×,*)

Es sei

$$\begin{aligned} t+x+y+z &= 0, \\ t^2+x^2+y^2+z^2 &= 4, \\ t^3+x^3+y^3+\frac{z^3}{3} &= 0. \end{aligned}$$

Haben die obigen Gleichungen in einer Umgebung von $(t,x,y,z) = (1,-1,1,-1)$ differenzierbare Lösungen $(x(t), y(t), z(t))$?

Aufgabe 6: (×,*)

Bestimme den Punkt auf der Kugeloberfläche $x^2+y^2+z^2 = 1$, der vom Punkt $(1,1,1)$ den maximalen Abstand hat.

Aufgabe 7: (×)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3.$$

Ferner sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0), (0,6), (6,0)$ in der (x,y)-Ebene. Finde die globalen Extrema von $f|_D$, d.h. f eingeschränkt auf D.