Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 10

Aufgabe 1: $(*, \times)$

Sei $A \in M(n, \mathbb{R})$ symmetrisch und (x, y) das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$. Zeige: Alle Eigenwerte von A sind positiv (d.h. grösser 0). $\Leftrightarrow$ $(x, Ax) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2: $(*, \times)$

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ mit $f, g \in \mathcal{R}(I)$. Zeige die folgenden Aussagen:

a) $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in I \Rightarrow \int_I f(x)\mathrm{d}x \geq \int_I g(x)\mathrm{d}x$.

b) $|f| \in \mathcal{R}(I)$ und $\int_I f(x)\mathrm{d}x \leq \int_I |f(x)|\mathrm{d}x$.

c) $f^2, g^2, f \cdot g \in \mathcal{R}(I)$ und $\int_I f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \sqrt{\int_I f(x)^2\mathrm{d}x}\sqrt{\int_I g(x)^2\mathrm{d}x}$.

Aufgabe 3: $(*, \times)$

Sei F ein diagonalisierbarer Endomorphismus eines endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums, für den gilt: Sind v und w Eigenvektoren von F, so ist $v + w$ ein Eigenvektor von F oder $v + w = 0$. Zeige, dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $F = \lambda \cdot id$ (id bezeichnet die Identität).

Aufgabe 4: $(\times)$

Berechne die folgenden beiden unbestimmten Integrale:

a) $\int x^3 e^x \mathrm{d}x$,

b) $\int x \ln(x)\mathrm{d}x$.

Aufgabe 5: $(\times)$

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f, g, h, F : I \to \mathbb{R}$, wobei g, h differenzierbar sind und f stetig ist. Weiterhin sei F gegeben durch $F(x) = \int_0^{h(x)} g(x)f(t)\mathrm{d}t$. Berechne die Ableitung von F.

Aufgabe 6: $(\times)$

Berechne die folgenden mehrdimensionalen Integrale:

a) $\int_I e^{x+y}\ \mathrm{d}(x, y)$ wobei $I = [1, 2] \times [1, 2]$,

b) $\int_I \frac{2z}{(x+y)^2}\ \mathrm{d}(x, y, z)$ mit $I = [1, 2] \times [2, 3] \times [0, 2]$.

Aufgabe 7: $(\times)$

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Zeige, dass $\|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{x \in A} \|Df(x)\|\ \|x - y\|$ für alle $x, y \in A$ gilt. Dabei ist $\|Df(x)\| = \sup_{v \in \mathbb{R}^m, \|v\|=1} \|Df(x)v\|$ die Norm der linearen Abbildung Df.