Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 11

Aufgabe 1: $(*, \times)$

Finde den Schwerpunkt des Objekts, begrenzt durch $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$ mit Dichtefunktion $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Erinnerung: Der *Schwerpunkt* $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ist gegeben durch

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{x} \rho(\boldsymbol{x}) d(\boldsymbol{x}),$$

mit der *Masse* $m = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\boldsymbol{x}) d(\boldsymbol{x})$.

Aufgabe 2: $(*, \times)$

Berechne das Volumen des Ellipsoids

$$\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{9} + \frac{w^2}{25} \leq 1$$

durch Transformation auf eine Kugel.

Aufgabe 3: $(\times)$

Werte das Integral $\int_E (x^2 + y^2) dV$ aus, wobei E der Kegel zwischen $z = 0$ und $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ist.

Aufgabe 4: $(\times)$

Bestimme das Volumen eines Tetraeders T, der durch die Flächen $x + 2y + z = 2, x = 2y, x = 0$ und $z = 0$ beschränkt ist.

Aufgabe 5: $(\times)$

Sei $a > 0$. Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die Kurve

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy\}$$

begrenzt wird.

Hinweis: Polarkoordinaten

Aufgabe 6: $(\times)$

Verwende Kugelkoordinaten, um das Volumenintegral

$$\int_E z dV$$

zu berechnen, wobei E gegeben ist durch

$$E = \{1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \qquad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Aufgabe 7: $(*, \times)$

Bestimme die Masse und den Massenschwerpunkt der Dreiecksfläche mit den Ecken $(0,0), (1,0)$ und $(0,2)$, wobei die Dichtefunktion durch $\rho(x,y) = 1 + 3x + y$ gegeben ist. Die Koordinaten $(\bar{x}, \bar{y})$ des Massenschwerpunktes einer Fläche $D \subset \mathbb{R}^2$, mit der Dichtefunktion $\rho(x,y)$ ist gegeben durch

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x,y)dA;$$
$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x,y)dA,$$

wobei die Masse gegeben ist durch

$$m = \iint_D \rho(x,y)dA$$

Aufgabe 8: $(\times)$

Vertausche die Integrationsreihenfolge des gegebenen Zweifachintegrals

$$\int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\sin y} f(x,y)dx \right] dy.$$

Aufgabe 9: $(\times)$

Berechne folgende Integrale durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge:

a) $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dxdy$,

b) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1} dxdy$.