Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 12

Aufgabe 1: (×)

Skizziere den Körper, dessen Volumen durch das Integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x$$

gegeben ist und berechne das Integral.

Aufgabe 2: (×)

Berechne das Volumen des Körpers, der begrenzt wird durch das Paraboloid $x = y^2$ und die Ebenen $x = z, z = 0$ und $x = 1$.

Aufgabe 3: (×)

Berechne das Integral $\int_E \sqrt{x^2 + z^2} \mathrm{d}V$, wobei E begrenzt wird durch das Paraboloid $y = x^2 + z^2$ und die Ebene $y = 4$.

Aufgabe 4: (×)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Berechne das Volumen des (dreidimensionalen) Körpers, der entsteht, wenn man $f(x)$ um die x-Achse rotiert.

Aufgabe 5: (×)

Sei die Dichtefunktion auf einer halben Kreisscheibe proportional zum Abstand des jeweiligen Punktes vom Kreismittelpunkt. Bestimme den Massenschwerpunkt der halben Kreisscheibe.

Aufgabe 6: (×)

Zeige, dass die Funktion $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, welche definiert ist durch

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 + x_3 x_4 - 2 \\ x_3^2 - x_1 + x_2 x_4^2 + 1 \\ x_2 + x_3 - 1 \end{pmatrix},$$

in einer Umgebung von $P = (2, 1, 0, 1)$ auflösbar ist nach (x_2, x_3, x_4), also

$$g(x_1) = \begin{pmatrix} g_1(x_1) \\ g_2(x_1) \\ g_3(x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Berechne $Dg(x_1)$ in P.

Aufgabe 7: $(\times)$

Berechne die Länge der durch $\gamma(t) := (t - \sin t, 1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$, gegebenen Zykloide.

Aufgabe 8: $(\times)$

Sei $F(x, y) = (xy^2, x^2y)$. Berechne $\int_C F \cdot dx$, wobei C die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 1)$

a) geradlinig

b) über den Zwischenpunkt $(0, 1)$

c) über den (kubischen) Parabelbogen $y = x^3$ verbindet.

Aufgabe 9: $(\times)$

Es seien $a, b, c > 0$ feste Zahlen und

$$V := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq z \leq c\right\}.$$

Berechne

$$\mathcal{I} := \int_V (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz\, .$$