Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 13

Aufgabe 1: (×)

Berechne das Oberfächenintegral $\int_S \sqrt{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{81}+\frac{z^2}{625}}\,dS$, wobei S die Ellipsoidfläche $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$ ist.

Aufgabe 2: (×)

Es sei S der Rand von der Region $y \geq 0, x^2+y^2=4, x^2+y^2=1$. Berechne $\int_S y^2dx+3xydy$.

Aufgabe 3: (×)

Es sei $\boldsymbol{F}=(\mathrm{e}^z,1,x\mathrm{e}^z)$. Zeige, dass $\boldsymbol{F}$ konservativ ist, und finde φ sodass $\nabla\varphi=\boldsymbol{F}$.

Aufgabe 4: (×)

Sei C die Kurve, die sich aus den Seiten des Dreiecks mit den Ecken $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,0)$ zusammensetzt. Berechne das Integral $\int_C(xydx+x^2dy)$ einmal direkt und einmal mit Hilfe von Green's Theorem.

Aufgabe 5: (×)

Zeige, mittels dem Satz von Green, dass

$$\int_C D_{\boldsymbol{N}} f ds = 0,$$

falls f harmonisch ist, d.h. $(\partial_x^2+\partial_y^2)f=0$. Dabei bezeichnet $\boldsymbol{N}=\frac{1}{\|\dot\gamma\|}(\dot\gamma_2,-\dot\gamma_1)$ die Einheitsnormale der Kurve C mit Parametrisierung $\boldsymbol{\gamma}(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$ und $D_{\boldsymbol{N}}$ die Richtungsableitung in Richtung $\boldsymbol{N}$.

Aufgabe 6: (×)

Sei $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(xy^2z,-x^2yz,z)$ und $V=\{(x,y,z)|x^2+y^2\leq 1,-1\leq z\leq -(x^2+y^2)\}$. Berechne $\int_{\partial V}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}$ einmal durch direkte Integration und einmal mit Hilfe eines geeigneten Integrationssatzes.

Aufgabe 7: (×)

Berechne

$$\int_C F\cdot dx, \qquad F(x,y)=\begin{pmatrix}3+2xy\\ x^2-3y^2\end{pmatrix},$$

wobei C durch $r(t)=\binom{e^t\sin(t)}{e^t\cos(t)}$, $0\leq t\leq\pi$ gegeben ist.
Hinweis: Finde f, so dass $\nabla f=F$.

Aufgabe 8: (×)

Berechne folgendes Integral einmal direkt und einmal mittels Green's Theorem:

$$\int_C xy^2dx+x^3dy=\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{F}(x,y)=\begin{pmatrix}xy^2\\ x^3\end{pmatrix},$$

wobei C das Rechteck mit den Ecken $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,3)$, $(0,3)$ ist.

Aufgabe 9: $(\times)$

Sei $F(x,y) = (x+y, y-x)$. Berechne $\int_C F \cdot dx$ längs der Kurve C_1 mit der Parameterisierung $\gamma_1(t) = (2t^2+t+1, t^2+1), t \in [0,1]$, und längs der Kurve C_2, die gegeben ist durch die Strecke von $(1,1)$ nach $(1,2)$ und anschliessend die Strecke von $(1,2)$ nach $(4,2)$.

Aufgabe 10: $(\times)$

Bestimme ohne Rechnung, mittels geometrischer Überlegung

$$\int_C F \cdot dr, \qquad F(x,y) = a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix},$$

wobei C den Kreis um den Ursprung mit Radius r beschreibt.