Mathematik für Physiker II

Übungsblatt 14

Aufgabe 1: (×)

a) Verwende Green um die *1. Greensche Identität* zu beweisen:

$$\int_S f\Delta g \,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\partial S} f(\nabla g)\cdot \mathbf{N}\mathrm{d}S - \int_S (\nabla f)\cdot(\nabla g)\mathrm{d}(x,y).$$

Dabei sind f und g zweimal stetig partiell differenzierbar.

b) Benutze die 1. Teilaufgabe um die *2. Greensche Identität* zu beweisen:

$$\int_S (f\Delta g - g\Delta f)\mathrm{d}(x,y) = \int_{\partial S} (f(\nabla g) - g(\nabla f))\cdot \mathbf{N}\mathrm{d}S.$$

Wieder sind f und g zweimal stetig partiell differenzierbar.

Aufgabe 2: (×)

Berechne $\int_A \mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ für das Vektorfeld $\mathbf{F}(x,y,z) := (y,-x,\sinh(xyz))$ und die Fläche $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ z = x^2+y^2 \leq 1\}$.

Aufgabe 3: (×)

Seien $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ \|(x,y)\| \leq 2, x^2+y^2 = 4-z\}$, $B = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ \|(x,y)\| \leq 2, z = 0\}$ und $\mathbf{F}(x,y,z) = (3xy^2z - \cos(y), y - y^3z, e^{x^2+y^2} - z)$ gegeben ($\|(x,y)\|$ bezeichnet die euklidische Norm im $\mathbb{R}^2$). Berechne $\int_A \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$ und $\int_B \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$ jeweils so parametrisiert, dass die Ergebnisse gleich sind (warum ist das möglich?).

Aufgabe 4: (×)

Sei A eine Parametrisierung von $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ x^2+y^2+z^2 = 1, z\geq 0\}$ mit nach außen orientiertem Normalenvektor und $\mathbf{F}(x,y,z) = (1, xz, xy)$. Berechne $\int_A \mathrm{rot}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$.

Aufgabe 5: (×)

Seien der Zylinder $Z = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\ 0\leq z\leq 5, x^2+y^2\leq 9\}$ und das Vektorfeld $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y, y+z, z+x)$ gegeben. Berechne $\int_{\partial Z}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$.

Aufgabe 6: (×)

Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(a,b) = c$ und $(\partial_y f)(a,b)\neq 0$. Zeige mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass $(\mathrm{grad} f)(a,b)$ senkrecht auf der Niveaufläche $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ f(x,y) = c\}$ steht.