1 Rechenaufgaben

1. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_0^{\ln(3)} \frac{4\mathrm{e}^{2x}}{3\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{x}-1}\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_0^{1} \frac{6x^3+16x^2+15x+11}{3x^2+8x+5}\,\mathrm{d}x.$$

2. Gegeben sei die Kurve C durch die Parametrisierung

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, t \in [0, 2\pi) \right\}.$$

   a) Skizzieren Sie die Kurve und berechnen Sie ihre Länge.

   b) Berechnen Sie die von C eingeschlossene Fläche mithilfe des Green'schen Integralsatzes.

   c) Gegeben sei nun zudem das Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}(x,y) = (x-y, x+y)$. Berechnen Sie den Fluss von $\mathbf{v}$ durch C.

3. Es sei für $r \in \mathbb{R}^+$ der Kreis $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2+y^2 = r^2\}$ gegeben. Berechnen Sie das Integral

$$\int_K \begin{pmatrix} (1-x^2)y \\ (1-y^2)x \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

einmal direkt und einmal mithilfe des Satzes von Green.

4. Es sei A die Fläche im ersten Quadranten, welche durch die Kurven $y = x$, $y = 1/x$ und $y = x/4$ begrenzt wird. Berechne den Flächeninhalt von A mithilfe des Green'schen Integralsatzes.

5. Berechnen Sie durch eine geeignete Parametrisierung

   a) die Oberfläche einer Kugel mit Radius $R > 0$.

   b) die Oberfläche des Körpers, welcher durch Rotation von $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, (x-R)^2 + y^2 \leq r^2\}$ um die y-Achse entsteht. Hierbei sei $0 < r < R$.

6. Es sei $G = \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$. Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{v} : G \to \mathbb{R}^3,\ \mathbf{v}(x) = \frac{x}{\|x\|^3}.$$

Bestimmen Sie $\Phi : G \to \mathbb{R}$ so, dass $\mathbf{v} = \mathrm{grad}(\Phi)$. Berechnen Sie $\mathrm{div}(\mathbf{v})$ und $\mathrm{rot}(\mathbf{v})$.

7. Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitskugel. Verifizieren Sie für das Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}(x,y,z) = (x, xy, z^3)$ den Integralsatz von Gauß, d.h. zeigen Sie durch explizites Ausrechnen, dass

$$\int_K \mathrm{div}(\mathbf{v})\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\partial K} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

8. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Leiten Sie eine Formel zur Berechnung der Länge des Graphen von f her.

9. Es sei $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$. Berechnen Sie für das Vektorfeld $\mathbf{v} : A \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}(x,y,z) = (1-z, 1-x, 1-y)$ möglichst geschickt das Integral
$$\int_A \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

10. Zeigen Sie, dass unter allen Dreiecken mit Umfang $U > 0$ das gleichseitige Dreieck den größten Flächeninhalt hat. Verwenden Sie hierzu, dass für die Seitenlängen $\ell_1, \ell_2, \ell_3 > 0$, also $U = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$, der Flächeninhalt gegeben ist durch
$$F(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = \frac{1}{4}\sqrt{U(U-2\ell_1)(U-2\ell_2)(U-2\ell_3)}.$$

2 Zum Denken

1. Das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ und das magnetische Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ seien als zweimal stetig differenzierbare Vektorfelder $\mathbf{E}, \mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ vorausgesetzt. Im Vakuum verschwinden Strom- und Ladungsdichte, sodass die Maxwell'schen Feldgleichungen folgendermaßen gegeben sind:
$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{E}) &= 0 & \qquad \operatorname{rot}(\mathbf{E}) &= -\kappa \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\mathbf{B}) &= 0 & \qquad \operatorname{rot}(\mathbf{B}) &= \frac{1}{\kappa c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$
Hierbei ist c die Lichtgeschwindigkeit und $\kappa \neq 0$ eine vom Maßsystem abhängige Konstante. Divergenz und Rotation beziehen sich auf die drei Ortskomponenten. Zeigen Sie
$$\Delta(\mathbf{E}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \Delta(\mathbf{B}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

2. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin(x) + \sinh(x)$.
   a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist. Berechnen Sie die Ableitung von f^{-1} an der Stelle $1 + \sinh(\pi/2)$.
   b) Zeigen Sie mithilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass die Gleichung $f(x) = y$ in einer Umgebung von $(x_0, y_0) := (\pi/2, 1 + \sinh(\pi/2))$ nach x auflösbar ist. Berechnen Sie dann die Ableitung der Lösungsfunktion an der Stelle y_0.

3. Zeigen Sie für $n, m \in \mathbb{N}$ die Beziehung
$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \delta_{nm}.$$

4. Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sei $(v_1,\dots,v_n)$ eine Basis von V. Ferner seien für $k=1,\dots,n$ die Vektoren d_k *rekursiv* definiert durch
$$c_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1}\langle d_j, v_k\rangle\, d_j \quad \text{und} \quad d_k := \frac{c_k}{\|c_k\|}.$$
   a) Betrachten Sie zunächst den Spezialfall $V=\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt. Machen Sie sich anhand des Beispiels $v_1=(4,2)$ und $v_2=(1,3)$ (auch graphisch) klar, dass (d_1,d_2) eine Orthonormalbasis von V ist.
   b) Begründen Sie, dass $c_1,\dots,c_n\neq\mathbf{0}$. Also sind die Vektoren $d_1,\dots,d_n\neq\mathbf{0}$ wohldefiniert.
   c) Zeigen Sie, dass $(d_1,\dots,d_n)$ eine Orthonormalbasis von V ist.

5. Die quadratischen Matrizen mit den üblichen Verknüpfungen bilden einen reellen Vektorraum. Zeigen Sie, dass durch $\langle A,B\rangle := \mathrm{tr}(A^TB)$ ein Skalarprodukt auf diesem Vektorraum definiert wird.

6. Es sei $A\in M(n,\mathbb{R})$. Beweisen oder widerlegen Sie: Ist A invertierbar, so ist A auch diagonalisierbar.

7. Zeigen Sie, dass die Menge aller invertierbaren Matrizen ausgestattet mit der üblichen Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet.

8. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig. Sei dann die Funktion $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definiert durch
$$H(x)=\exp\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$
   a) Berechnen Sie die Ableitung $H'(x)$.
   b) Es sei $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zudem eine differenzierbare Funktion mit $G'=fG$. Zeigen Sie, dass dann $G(x)=G(0)H(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt.

9. Es seien $n\in\mathbb{N}$ und $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Gleichung
$$\sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx)=0$$
in $(0,\pi)$ mindestens eine Lösung hat. Sie können hierzu den Mittelwertsatz der Integralrechnung verwenden.

10. Die Matrix $A\in M(n,\mathbb{R})$ mit den Einträgen $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ sei schiefsymmetrisch, d.h. es gelte stets $a_{ij}=-a_{ji}$. Zeigen Sie, dass A keinen von Null verschiedenen reellen Eigenwert haben kann.

11. Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Integralrechnung, um folgende Abschätzung zu zeigen:
$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x \le \frac{2}{3}$$

12. Sei $a\in\mathbb{R}$. Untersuchen Sie, ob der folgende Grenzwert existiert:
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{a-h}^{a+h}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$