Aufgabe 1 (implizite Funktionen)

a) Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 + \cos(y_1 y_2) &= y_2 x_1 + 1 \\ \sin(y_1) &= x_2 + y_2 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $P = (x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, -1, 0, 1)$ nach (y_1, y_2) auflösbar ist, d.h.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =: f(x_1, x_2)$$

und berechne $Df(0, -1)$.

b) Finde einen Punkt, für den es keine solche Umgebung gibt. Begründe deine Antwort.

Lösung

a) Betrachte die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{pmatrix} y_1 + \cos(y_1 y_2) - y_2 x_1 - 1 \\ \sin(y_1) - x_2 - y_2 \end{pmatrix}$$

und setze $(a, b) := ((0, -1), (0, 1))$. Dann gilt $F(a, b) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$. Ferner ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial(y_1, y_2)}(a, b) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}(a, b) \\ &= \begin{pmatrix} 1 - y_2 \sin(y_1 y_2) & -y_1 \cos(y_1 y_2) - x_1 \\ \cos(y_1) & -1 \end{pmatrix}(a, b) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da diese Matrix invertierbar ist, lässt sich das Gleichungssystem also lokal um nach (y_1, y_2) auflösen. Für die Lösungsfunktion f gilt wegen $f(a) = b$ an der Stelle $a = (x_1, x_2) = (0, -1)$ dann

$$\begin{aligned} Df(a) &= -\left[\frac{\partial F}{\partial(y_1, y_2)}(a, f(a))\right]^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial(x_1, x_2)}(a, f(a)) \\ &= -\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}(a, f(a)) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Für den Punkt $Q = ((1, 0), (0, 0))$ gilt ebenso $F(Q) = \mathbf{0}$, aber die Matrix

$$\frac{\partial F}{\partial(y_1, y_2)}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ist nicht invertierbar, sodass der Satz über implizite Funktionen keine Anwendung findet.

Aufgabe 2 (Extremstellensuche)

a) Es sei $f(x,y) = \mathrm{e}^{-xy}$. Berechne alle globalen Minima und Maxima von f auf $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.

b) Weiter sei $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$. Finde alle lokalen Minima und Maxima.

Lösung

a) Da die Exponentialfunktion streng monoton ist, würde es hier genügen, den Exponenten auf Extrema zu untersuchen (Übung). Wir rechnen hier ohne diesen Trick (was etwas aufwändiger ist).

- Wir bestimmen die Extrema im Inneren von M. Gradient und Hessematrix von f sind folgendermaßen gegeben (Produktregel!):

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(f)(x,y) &= \begin{pmatrix} -y\,\mathrm{e}^{-xy} \\ -x\,\mathrm{e}^{-xy} \end{pmatrix} \\ \operatorname{Hess}(f)(x,y) &= \begin{pmatrix} y^2 & xy-1 \\ xy-1 & x^2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-xy} \end{aligned}$$

  Hieraus erhält man ohne weitere Rechnung ($\mathrm{e}^{-xy} \neq 0$)

$$\operatorname{grad}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0) \in \mathring{M}$$

  als einzigen kritischen Punkt. Die Hessematrix an dieser Stelle ist gegeben durch

$$\operatorname{Hess}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

  sodass sich die Eigenwerte ergeben zu

$$\det \begin{pmatrix} 0-\lambda & -1 \\ -1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm 1.$$

  Da die Hessematrix von f an der Stelle $(0,0)$ also indefinit ist, liegt dort ein Sattelpunkt.

- Wir bestimmen nun die Extremstellen auf dem Rand von M mithilfe von Lagrange'schen Multiplikatoren: Die Randbedingung lautet

$$(x,y) \in \partial M \quad \Leftrightarrow \quad h(x,y) := x^2 + 4y^2 - 1 = 0.$$

  Wir erhalten hiermit:

$$\operatorname{grad}(f)(x,y) = \Lambda \cdot \operatorname{grad}(h)(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -y\,\mathrm{e}^{-xy} \\ -x\,\mathrm{e}^{-xy} \end{pmatrix} = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 8y \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \end{matrix}$$

  Wäre $\Lambda = 0$, so würde direkt $(x,y) = (0,0)$ folgen. Jedoch liegt $(0,0)$ nicht auf dem Rand von M, weswegen wir von $\Lambda \neq 0$ ausgehen können. Ebenso folgt, dass wir von $x, y \neq 0$ ausgehen können. Wir multiplizieren (i) mit x und (ii) mit y und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -xy\,\mathrm{e}^{-xy} \\ -xy\,\mathrm{e}^{-xy} \end{pmatrix} = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} 2x^2 \\ 8y^2 \end{pmatrix},$$

woraus wir direkt $2\Lambda x^2 = 8\Lambda y^2$ folgern. Mit der Randbedingung finden wir dann

$$x^2 = 4y^2 = 1 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Für jeden möglichen Wert von x erhalten wir wiederum zwei mögliche Werte von y aus der Beziehung $x^2 = 4y^2 \Leftrightarrow y = \pm x/2$. Insgesamt:

$$\begin{aligned} P_1 &= \left(+\tfrac{1}{\sqrt{2}}, +\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) &&\Rightarrow \quad f(P_1) = \mathrm{e}^{-1/4} \\ P_2 &= \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, +\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) &&\Rightarrow \quad f(P_2) = \mathrm{e}^{1/4} \\ P_3 &= \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) &&\Rightarrow \quad f(P_3) = \mathrm{e}^{-1/4} \\ P_4 &= \left(+\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) &&\Rightarrow \quad f(P_4) = \mathrm{e}^{1/4} \end{aligned}$$

Es liegen also die globalen Maxima von f auf M in den Punkten P_2 und P_4, die globalen Minima in P_1 und P_3.

b) Gradient und Hessematrix der Funktion f sind folgendermaßen gegeben:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(f)(x,y) &= \begin{pmatrix} 4x^3 - 4y \\ 4y^3 - 4x \end{pmatrix} \\ \operatorname{Hess}(f)(x,y) &= \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die kritischen Punkte ergeben sich aus der Forderung

$$\operatorname{grad}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x^3 - y \\ y^3 - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \end{matrix}$$

Wir setzen (i) in (ii) ein und erhalten $x = y^3 = (x^3)^3 = x^9$, sodass die möglichen Lösungen für x gegeben sind durch $x = 0, \pm 1$. Aus (ii) erhalten wir stets die zugehörige Lösung für y, sodass alle kritischen Punkte gegeben sind durch

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = (1,1) \quad \text{und} \quad P_3 = (-1,-1).$$

Wir können diese kritischen Punkte nun anhand der Definitheit der Hessematrix an der jeweiligen Stelle klassifizieren. Es folgen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess}(f)(P_1) &= \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} && \text{hat die EW } \pm 4 \\ \operatorname{Hess}(f)(P_2) = \operatorname{Hess}(f)(P_3) &= \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} && \text{hat die EW } 12 \pm 4 > 0 \end{aligned}$$

An der Stelle P_1 liegt also ein Sattelpunkt, während an den Stellen P_2 und P_3 lokale Minima liegen. f hat kein lokales Maximum.

Aufgabe 3 (Höhenschnitte und Integrationsreihenfolge)

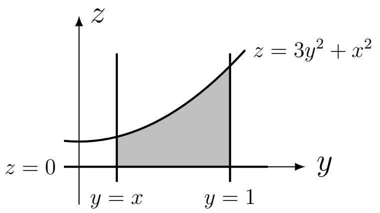
a) Bestimme das Volumen des Bereichs, der durch das Paraboloid $z = x^2 + 3y^2$ und durch die Flächen $x = 0$, $y = 1$, $y = x$ und $z = 0$ beschränkt ist.

b) Berechne

$$I := \int_{y=0}^{1} \int_{x=\arcsin(y)}^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Lösung

a) Wir betrachten Höhenschnitte für gegebenes $x \in \mathbb{R}$, um die Integrationsgrenzen zu bestimmen. Wir erhalten:

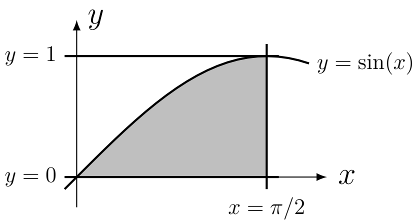


- $0 \le x \le 1$
- $x \le y \le 1$
- $0 \le z \le x^2 + 3y^2$

Das Volumen ergibt sich daher folgendermaßen:

$$V = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{1} \int_{z=0}^{x^2+3y^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{1} \Big[x^2 y + y^3\Big]_{y=x}^{1} \mathrm{d}x = \frac{5}{6}$$

b) Wir vertauschen die Integrationsreihenfolge und skizzieren hierzu zunächst den Integrationsbereich.



Damit ergibt sich das Integral zu

$$I = \int_{x=0}^{\pi/2} \int_{y=0}^{\sin(x)} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

wodruch die innere Integration leicht durchzuführen ist, da der Integrand nicht von y abhängt.

Mit der Substitution $u = 1 + \cos^2(x)$ erhalten wir das gesuchte Integral:

$$I = \int_{x=0}^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2(x)}\, \underbrace{\sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x}_{=-\mathrm{d}u/2} = -\int_{u=2}^{1} \sqrt{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

Aufgabe 4 (Kugel- und Polarkoordinaten)

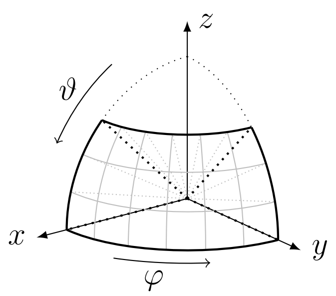
a) Berechne das Volumen des Objekts, welches innerhalb der Sphäre $x^2+y^2+z^2=4$ und unterhalb des Kegels $z=\sqrt{x^2+y^2}$ liegt und durch $x,y,z\geq 0$ beschränkt ist.

b) Berechne mittels Umformung in Polarkoordinaten

$$I := \int_{x=-3}^{3}\int_{y=0}^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Lösung

a) Gesucht ist ein Volumen im ersten Oktanten, welches sich am einfachsten in Kugelkoordinaten berechnen lässt.



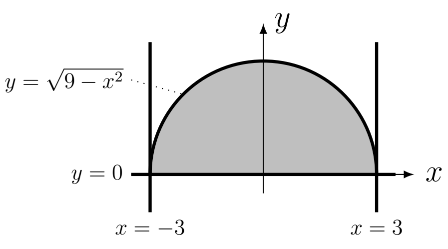
Das Volumen ergibt sich also folgendermaßen (die begrenzende Kugel hat Radius 2):

$$V = \int_{r=0}^{2}\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{\vartheta=\pi/4}^{\pi/2} r^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

Wir erhalten also für dieses Integral:

$$V = \int_{r=0}^{2} r^2\,\mathrm{d}r \int_{\varphi=0}^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi \int_{\vartheta=\pi/4}^{\pi/2}\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{8}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{2}}$$

b) In Polarkoordinaten ist $x=r\cos(\varphi)$ sowie $y=r\sin(\varphi)$. Insbesondere ist die Ersetzung $x^2+y^2=r^2$ durchzuführen.



Also gilt für das gesuchte Integral:

$$I = \int_{r=0}^{3}\int_{\varphi=0}^{\pi}\sin(r^2)\,r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

Wir erhalten hieraus durch die Substitution $u=r^2$ schließlich:

$$I = \pi\int_{r=0}^{3}\sin(r^2)\,r\,\mathrm{d}r = \pi\int_{u=0}^{9}\sin(u)\,\frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{\pi}{2}(1-\cos(9))$$

Aufgabe 5 (Integralsymmetrien und Matrizen)

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, $a > 0$ und $f(-x) = -f(x)$. Zeige $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $p \in \mathbb{R}$ und $f(x + p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass dann $\int_{x}^{x+p} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Es sei für ein $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}.$$

Ist A diagonalisierbar? Bestimme die Eigenwerte von A.

d) Es sei

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechne $\det(B)$, $\det(B^{-1})$, $\det(3B)$ und $\det(B^2)$.

Lösung

a) Mittels der Substitution $x \rightsquigarrow -x$ folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^0 f(-x)(-\mathrm{d}x) + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 0
\end{aligned}$$

b) Durch die Verschiebung bzw. Substitution $u = t-p$ erhalten wir die Behauptung:

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+p} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_x^p f(t)\,\mathrm{d}t + \int_p^{x+p} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_x^p f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{p-p}^{x+p-p} f(u+p)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_x^p f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

c) Da A symmetrisch ist, ist A diagonalisierbar. Wir berechnen

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & a & a \\ a & a-\lambda & a \\ a & a & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^3 + a^3 + a^3 - 3a^2(a-\lambda) = (3a-\lambda)\lambda^2.$$

Da also

$$\det(A - \lambda\,\mathbb{1}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ oder } \lambda = 3a,$$

sind 0 und $3a$ die Eigenwerte der Matrix A.

d) Die Determinante von B berechnen wir durch Zeilenumformungen:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -8$$

Also existiert B^{-1} und wegen $1 = \det(\mathbb{1}) = \det(BB^{-1}) = \det(B)\det(B^{-1})$ ist $\det(B^{-1}) = 1/\det(B) = -1/8$.

Da die Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor die Determinante um denselben Faktor ändert, folgt $\det(3B) = 3^3 \det(B) = -216$.

Schließlich folgt $\det(B^2) = \det(B)\det(B) = 64$.

Aufgabe 6 (Beweisübungen)

a) Es seien p Punkte $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeige, dass die Summe der Abstandsquadrate $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{p} \|x - a_\nu\|^2,$$

ein Minimum im »Mittelpunkt« $\xi := \frac{1}{p}\sum_{\nu=1}^{p} a_\nu$ besitzt.

b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige für alle $0 \le p < 1$ und alle $a \in \mathbb{R}$, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^p} \int_a^{a+h} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

c) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 \le a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Berechne das (orientierte) Volumen des Körpers, der entsteht, wenn man die Fläche unter dem Graphen von f um die y-Achse rotiert.

Lösung

a) Wir berechnen den Gradienten von f, um zu zeigen, dass dieser an der Stelle ξ verschwindet:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(f)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, e_i &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} (x_j - (a_\nu)_j)^2 \right] e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{p} 2(x_i - (a_\nu)_i) e_i \\
&= 2 \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i \sum_{\nu=1}^{p} 1 - \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} (a_\nu)_i\, e_i \right] \\
&= 2 \left(px - \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu \right)
\end{aligned}$$

Es ist nun offensichtlich, dass $\operatorname{grad}(f)(\xi) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Wir bestimmen nun die Hessematrix, um nachzuweisen, dass es sich tatsächlich um ein lokales Minimum handelt:

$$\begin{aligned}
[\operatorname{Hess}(f)(x)]_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{grad}(f)(x))_j \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} 2 \left(p x_j - \sum_{\nu=1}^{p} (a_\nu)_j \right) \\
&= 2p\, \delta_{ij}
\end{aligned}$$

Die Hessematrix ist also gegeben durch $\operatorname{Hess}(f)(x) = 2p\,\mathbb{1}$ und hat daher nur den Eigenwert $2p > 0$. Insbesondere ist $\operatorname{Hess}(f)(\xi)$ positiv definit, womit in ξ tatsächlich ein lokales Minimum vorliegt.

b) Es genügt zu zeigen, dass der Betrag obigen Ausdrucks im Limes verschwindet. Ferner setzen wir

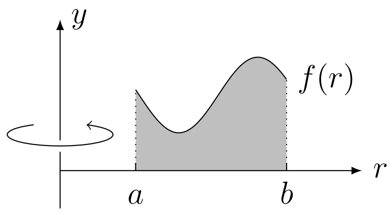
$$C_a(h) := \sup_{t\in[a,a+h]} |f(t)|,$$

sodass aufgrund der Stetigkeit von f die Beziehung $\lim_{h\to 0} C_a(h) = |f(a)| < \infty$ gilt. Es folgt damit

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{1}{h^p} \int_a^{a+h} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{|h^p|} |a+h-a|\, C_a(h) \right) = \lim_{h\to 0} \left(|h^{1-p}|\, C_a(h) \right) = 0,$$

weswegen Gleichheit gelten muss.

c) Der entstehende Rotationskörper ist radialsymmetrisch, sodass sich sein Volumen leicht in Zylinderkoordinaten berechnen lässt. Die Formel für das Volumen ist also



gegeben durch

$$V = \int_{r=a}^{b} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{y=0}^{f(r)} r\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = 2\pi \int_{r=a}^{b} r\,f(r)\,\mathrm{d}r.$$