Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Sommersemester 2013
C. Hainzl

Mathematik für Physiker II

Lernzielkontrolle II

Name
Vorname
Matrikelnr.

Bitte verwende diese Seite als Deckblatt deiner Arbeit, und lasse die untenstehende Tabelle zur späteren Bewertung frei.

Aufgabe	Maximalpunktzahl	maximale Bonuspunkte	erzielte Punkte
1	9	0	
2	10	0	
3	10	0	
4	10	0	
5	12	0	
6	9	0	
Total	60	0	

Hinweise

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Bitte beachte folgende Punkte:

- Trage **jetzt** deinen Namen in das Deckblatt ein und gib es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt deiner Arbeit ab.
- Der Herleitungsweg von Resultaten muss übersichtlich und vollständig sein. Die Antworten müssen begründet werden.

Aufgabe 1: (9P)

a) Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1 + \cos(y_1 y_2) = y_2 x_1 + 1 \\ \sin(y_1) = x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

in einer Umgebung von $P = (x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, -1, 0, 1)$ nach (y_1, y_2) auflösbar ist, d.h.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = f(x_1, x_2)$$

und berechne $Df(0, -1)$.

b) Finde einen Punkt, für den es keine solche Umgebung gibt. Begründe deine Antwort!

Aufgabe 2: (10P)

a) Es sei $f(x,y) = \mathrm{e}^{-xy}$. Berechne alle globalen Minima und Maxima von f auf $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.

b) Weiter sei $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$. Finde alle lokalen Minima und Maxima.

Aufgabe 3: (10P)

a) Bestimme das Volumen des Bereichs, der durch das Paraboloid $z = x^2 + 3y^2$ und durch die Flächen $x = 0, y = 1, y = x$ und $z = 0$ beschränkt ist.

b) Berechne

$$\int_0^1 \int_{\arcsin(y)}^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Aufgabe 4: (10P)

a) Berechne das Volumen des Objekts, welches innerhalb der Sphäre $x^2+y^2+z^2 = 4$ und unterhalb des Kegels $z = \sqrt{x^2+y^2}$ liegt und durch $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ beschränkt ist.

b) Berechne mittels Umformung in Polarkoordinaten

$$\int_{-3}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2+y^2) \mathrm{d}y \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 5: (12P)

a) Es sei f stetig und $[-a, a] \subset \mathbb{R}, a > 0$ und $f(-x) = -f(x)$. Zeige $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.

b) Es sei f stetig mit $f(x+p) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Zeige: $\int_{x}^{x+p} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{p} f(x)\mathrm{d}x, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}.$$

Ist A diagonlisierbar? Bestimme ihre Eigenwerte.

d) Es sei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechne $\det(B), \det(B^{-1}), \det(3B), \det(B^2)$.

Aufgabe 6: (9P)

a) Im $\mathbb{R}^n$ seien p Punkte $a_1, \ldots, a_p$ gegeben. Zeige, dass die Summe der Abstandsquadrate $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{p} |x - a_\nu|^2,$$

ein Minimum im „Mittelpunkt" $\xi := \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu$ besitzt.

b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^p} \int_a^{a+h} f(t) \mathrm{d}t = 0, \quad 0 \leq p < 1, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

c) Sei $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to [a, b]$ eine stetige Funktion und A die Fläche unter dem Graph von f (d.h. die Fläche zwischen der Kurve $f(x)$ und der x-Achse). Berechne das Volumen des Körpers, der entsteht wenn die Fläche A um die y-Achse rotiert wird.