Mathematik für Physiker II

Lernzielkontrolle I

Name

Vorname

Matrikelnr.

Bitte verwende diese Seite als Deckblatt deiner Arbeit, und lasse die untenstehende Tabelle zur späteren Bewertung frei.

Aufgabe	Maximalpunktzahl	maximale Bonuspunkte	erzielte Punkte
1	10	0	
2	10	0	
3	10	0	
4	10	0	
5	10	0	
6	10	0	
Total	60	0	

Hinweise

Prüfungsdauer: 3 Stunden.

Bitte beachte folgende Punkte:

- Trage **jetzt** deinen Namen in das Deckblatt ein und gib es **am Ende** der Prüfung als vorderstes Blatt deiner Arbeit ab.
- Der Herleitungsweg von Resultaten muss übersichtlich und vollständig sein. Die Antworten müssen begründet werden.

Aufgabe 1: (10P)

Die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch $f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}$ und $g(x,y,z) = (x+2y+3z)^{\frac{3}{2}}$.

a) Berechne die Richtungsableitung von f an der Stelle $x_0 = (1,1)$ in Richtung von $v = (-1,-1)$.

b) Berechne die Richtungsableitung von g an der Stelle $y_0 = (1,1,2)$ in Richtung von $v = (0,2,-1)$.

c) Finde für f im Punkt x_0 und g im Punkt y_0 die Richtungen v_f und v_g, in der die Richtungsableitung maximal wird.

Aufgabe 2: (10P)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin(x)$. Berechne das Taylorpolynom zweiten Grades von f an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 3: (10P)

Bestimme die folgenden Grenzwerte (mit Begründung):

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(x)}$,

c) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\sinh^2(x)}\right)$.

Aufgabe 4: (10P)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

a) Zeige, dass $f'(0) = 0$.

b) Berechne das Taylorpolynom vierter Ordnung von $\cos(x)$. Bestimme mit Hilfe des Taylorpolynoms von $\cos(x)$ ob f bei $x = 0$ ein lokales Minimum oder Maximum hat (Begründung).

Aufgabe 5: (10P)

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

i) Zeige, dass f im Ursprung differenzierbar ist.

ii) Argumentiere, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

iii) Ist f im Ursprung auch stetig differenzierbar? Begründe Deine Aussage.

b) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle $|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|^2$ für ein $L > 0$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige, dass g auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und $g'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 6: (10P)

Die Funktion f sei gegeben durch $f(x) = (2x^2 - x - 1)e^{-x}$.

a) Gib den größtmöglichen Definitionsbereich D von f an.

b) Bestimme alle Nullstellen von f, f' und f''.

c) Bestimme alle lokalen Extrema von f und gib an, ob es sich um Maxima oder Minima handelt.

d) Bestimme die Bereiche, in denen f konvex bzw. konkav ist.

e) Skizziere das Schaubild von f.